Über zwangläufige rationale Bewegungsvorgänge

Von

Bert Jüttler (Darmstadt)

(Mit 1 Abbildung)

Zur Beschreibung von Kurven und Flächen werden im *Computer Aided Geometric Design* meist polynomiale oder rationale Parameterdarstellungen verwendet. Bei der Konstruktion solcher Parameterdarstellungen für sogenannte *Bewegflächen*, die durch die Bewegung einer Profilkurve im Raum entstehen, lassen sich zwangläufige rationale Bewegungsvorgänge verwenden.

Bisher wurden vor allem rationale Zwangläufe der Ordnung $m \leq 4$ betrachtet. So ergeben sich für $m = 2$ die bekannten Darboux–Bewegungen [2]. Von W. Wunderlich [14] wurden sämtliche Zwangläufe der Ordnung $m = 3$ bestimmt, daran anschließend untersuchte O. Röschel [11] die zwangläufigen rationalen Bewegungsvorgänge der Ordnung $m = 4$. Mit Hilfe der gefundenen Darstellungsformeln entwickelte O. Röschel [12] Konstruktionen für rationale Bewegflächen (mit einem kinematischen Netz aus Parameterlinien), die durch Bewegungsvorgänge der Ordnung $m \leq 4$ erzeugt werden. Weiterhin wurden solche Bewegflächen in [10] zur approximativen Beschreibung von Schraubflächen herangezogen.

Die vorliegende Arbeit schließt an die Ergebnisse von W. Wunderlich und O. Röschel an und zeigt sie in neuem Licht. Mit Hilfe der Beschreibung von Bewegungen durch duale Quaternionen ist es möglich, eine allgemeine Darstellung für zwangläufige rationale Bewegungsvorgänge fester Ordnung zu finden.

Zunächst wird im ersten Abschnitt kurz der Zusammenhang zwischen Bewegflächen und rationalen Zwangläufen dargestellt. Danach faßt der zweite Abschnitt zusammen, wie sich rationale Zwangläufe mit dualen Quaternionen beschreiben lassen, und führt den Begriff des „Q–Zwanglaufs“ ein. Die beiden folgenden Abschnitte sind der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen zwangläufigen rationalen Bewegungsvorgängen und Q–Zwangläufen gewidmet, dabei ergibt sich eine Klasseneinteilung und eine allgemeine Darstellung für rationale Zwangläufe fester Ordnung, die im anschließenden fünften Abschnitt zur Konstruktion rationaler Bewegflächen verwendet wird.

Der sechste Abschnitt diskutiert sphärische rationale Zwangläufe und stellt einen sehr allgemeinen Zugang zur kinematischen Erzeugung sphärischer rationaler Kurven vor. Abschließend werden die erhaltenen Darstellungsformeln auf ebene rationale Zwangläufe und auf rationale Zylinderschrotungen übertragen.

1. Rationale Bewegflächen und ihre Erzeugung durch zwangläufige rationale Bewegungsvorgänge

Den folgenden Überlegungen liegt der dreidimensionale reelle euklidische Raum zugrunde, der durch Hinzunahme der Fernpunkte projektiv abgeschlossen wird. Die Punkte dieses Raumes werden durch homogene Koordinaten $\mathbf{x} = (\ x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ )^\top$ mit

$$1 : x : y : z = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 \tag{1}$$

beschrieben. Durch die Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t, v)$ (mit $(t, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$), deren vier Komponenten $x_i(t, v)$ jeweils bivariate Polynome vom Höchstgrad m bzw. n in t bzw. v sind (i=0,...,3), sei ein Stück einer rationalen Fläche vom Polynomgrad (m, n) gegeben. Solche Flächen besitzen vielfältige Anwendungen im *Computer Aided Geometric Design* [6].

Falls die v–Parameterlinien $\mathbf{x}(t_0, v)$ ($v \in [0, 1], t_0$ fest) der gegebenen rationalen Fläche sämtlich kongruent sind, wobei Punkte gleichen v–Parameterwertes einander entsprechen sollen, dann handelt es sich bei dieser Fläche um eine *rationale Bewegfläche* mit einem *kinematischen Netz* aus Parameterlinien. Von O. Röschel [12] wurde festgestellt, daß sich jede rationale Bewegfläche vom Polynomgrad (m, n), deren Parameterlinien ein kinematisches Netz bilden, durch einen Zwanglauf erzeugen läßt, bei dem sich die Punkte des Gangsystems auf rationalen Kurven der Ordnung $2m$ (mit dem Parameter t) bewegen. (Dabei ist n der Polynomgrad der Profilkurve.) Im Fall einer nichtebenen Profilkurve besitzen die Bahnkurven der Punkte des Gangsystems sogar höchstens die Ordnung m.

Solche zwangläufigen Bewegungsvorgänge werden im weiteren als *rationale Bewegungsvorgänge der Ordnung m* bezeichnet. Sie besitzen eine Matrixdarstellung

$$\mathrm{B}(t) = \left(\begin{array}{c|ccc} v_0(t) & 0 & 0 & 0 \\ \hline v_1(t) & & & \\ v_2(t) & & \mathrm{D}(t) & \\ v_3(t) & & & \end{array}\right) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

(wobei die 3×3–Matrix $\frac{1}{v_0(t)}\mathrm{D}(t)$ orthonormal ist), in der sämtliche Komponenten Polynome in t vom Höchstgrad m sind. Die Bahnkurve eines im Gangsystem festen Punktes $\mathbf{p}$ lautet dann $\mathrm{B}(t) \cdot \mathbf{p}$.

2. Beschreibung rationaler Zwangläufe mittels dualer Quaternionen

Duale Quaternionen sind ein wichtiges Hilfsmittel in der räumlichen Kinematik, siehe beispielsweise Blaschke'60 [1]. Eine Quaternion $Q^0 = q^0 + \vec{\mathbf{q}}^0$ besteht aus dem Skalarteil $q^0 = \text{Skal}\, Q^0 \in \mathbb{R}$ und dem Vektorteil $\vec{\mathbf{q}}^0 = \text{Vek}\, Q^0 \in \mathbb{R}^3$. Mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation

$$\begin{aligned} Q^0 * R^0 &= (q^0 + \vec{\mathbf{q}}^0) * (r^0 + \vec{\mathbf{r}}^0) \\ &= q^0 r^0 - \vec{\mathbf{q}}^0 \circ \vec{\mathbf{r}}^0 \quad + \quad q^0 \vec{\mathbf{r}}^0 + r^0 \vec{\mathbf{q}}^0 + \vec{\mathbf{q}}^0 \times \vec{\mathbf{r}}^0 \end{aligned} \tag{3}$$

(wobei $\circ$ und $\times$ das übliche Skalar- und Kreuzprodukt von Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bezeichnen) bilden die Quaternionen den Schiefkörper $\mathbb{H}$. Mit $\widetilde{Q}^0 = q^0 - \vec{\mathbf{q}}^0$ wird die zu Q^0 konjugierte Quaternion bezeichnet.

Durch Adjunktion der *dualen Einheit* ε mit $\varepsilon^2 = 0$ entsteht aus dem Schiefkörper $\mathbb{H}$ der nichtkommutative Ring $\mathbb{H}^\varepsilon = \mathbb{H}[\varepsilon]$ der *dualen Quaternionen.* Eine duale Quaternion $Q = Q^0 + \varepsilon Q^\varepsilon \in \mathbb{H}^\varepsilon$ besitzt den Realteil $Q^0 = \text{Re}\, Q = q^0 + \vec{\mathbf{q}}^0 \in \mathbb{H}$ und den Dualteil $Q^\varepsilon = \text{Du}\, Q = q^\varepsilon + \vec{\mathbf{q}}^\varepsilon \in \mathbb{H}$. Duale Quaternionen, die der *Plückerbedingung*

$$\text{Du}\left(Q * \widetilde{Q}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad q^0 q^\varepsilon + \vec{\mathbf{q}}^0 \circ \vec{\mathbf{q}}^\varepsilon = 0 \tag{4}$$

genügen, lassen sich zur Beschreibung von Bewegungen nutzen:

Der Verschiebung, die den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt mit den homogenen Koordinaten $\mathbf{v} = (\, v_0 \; v_2 \; v_2 \; v_3 \,)^\top$ überführt, wird die duale Quaternion

$$T(\mathbf{v}) = 2v_0 + \varepsilon \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2v_0 + \varepsilon \vec{\mathbf{v}} \quad (v_0 \neq 0), \tag{5}$$

zugeordnet. Der Drehung um die durch den Ursprung verlaufende Achse mit dem normierten Richtungsvektor $\vec{\mathbf{r}}$ durch den Winkel φ entspricht die Quaternion

$$R(\vec{\mathbf{r}}, \varphi) = \lambda \cos\frac{\varphi}{2} + \lambda \sin\frac{\varphi}{2}\, \vec{\mathbf{r}} \, = d_0 + \vec{\mathbf{d}} \quad (\vec{\mathbf{r}} \neq \vec{\mathbf{0}}). \tag{6}$$

(Der reelle Faktor $\lambda \neq 0$ kann beliebig gewählt werden.) Im Unterschied zu [1] werden hier duale Quaternionen nur bis auf einen reellen Faktor betrachtet. Die Klassen proportionaler dualer Quaternionen, die der Plückerbedingung genügen, lassen sich damit als Punkte der Hyperquadrik (4) des reellen siebendimensionalen projektiven Raumes P^7 auffassen.

Jede Bewegung des euklidischen Raumes kann aus einer Verschiebung $T(\mathbf{v})$ und einer daran anschließenden Drehung $R(\vec{\mathbf{r}}, \varphi)$ zusammengesetzt werden. Ihr wird die duale Quaternion

$$Q = T(\mathbf{v}) * R(\vec{\mathbf{r}}, \varphi) = \underbrace{(2v_0 + \varepsilon \vec{\mathbf{v}})}_{\text{Translationsanteil}} * \underbrace{(d_0 + \vec{\mathbf{d}})}_{\text{Rotationsanteil}} \tag{7}$$

zugeordnet. (Die Multiplikation der Quaternionen entspricht der Hintereinanderausführung der entsprechenden Bewegungen.)

Andererseits läßt sich jede duale Quaternion mit nichtverschwindendem Realteil, die der Plückerbedingung (4) genügt, in einen Translations- und einen Rotationsanteil aufspalten: Der Translationsanteil von $Q = Q^0 + \varepsilon Q^\varepsilon$ ist $Q * \widetilde{Q}^0$, der Rotationsanteil beträgt Q^0. Durch Vergleich der Komponenten des Translations- und des Rotationsanteils mit (5) und (6) lassen sich unmittelbar die Größen $\mathbf{v}$, $\vec{\mathbf{r}}$ und φ ablesen.
Einer rationalen Kurve auf der Hyperquadrik (4) des P^7 entspricht ein zwangläufiger Bewegungsvorgang. (Punkte mit verschwindendem Realteil seien dabei stillschweigend ausgeschlossen.) Zur Abkürzung wird für diese Zwangläufe eine Bezeichnung eingeführt:

Definition. *Der zwangläufige Bewegungsvorgang, der einer rationalen Kurve der Ordnung k auf der Hyperquadrik (4) des P^7 entspricht, wird im weiteren als rationaler Q–Zwanglauf vom Polynomgrad k bezeichnet[1]. Er läßt sich durch eine duale Quaternion*

$$Q(t) = Q^0(t) + \varepsilon\, Q^\varepsilon(t) = \left[q^0(t) + \vec{\mathbf{q}}^0(t)\right] + \varepsilon \left[q^\varepsilon(t) + \vec{\mathbf{q}}^\varepsilon(t)\right] \tag{8}$$

beschreiben, deren Komponenten $q^0(t)$, $q^\varepsilon(t)$, $\vec{\mathbf{q}}^0(t)$, $\vec{\mathbf{q}}^\varepsilon(t)$ Polynome bzw. Vektorpolynome vom Höchstgrad k in t sind.

Im Mittelpunkt der weiteren Untersuchungen steht der Zusammenhang zwischen zwangläufigen rationalen Bewegungsvorgängen und Q–Zwangläufen. Gegeben sei zunächst ein Q–Zwanglauf

$$Q(t) = \underbrace{(2v_0(t) + \varepsilon\vec{\mathbf{v}}(t))}_{\text{Translationsanteil}} * \underbrace{(d_0(t) + \vec{\mathbf{d}}(t))}_{\text{Rotationsanteil}}. \tag{9}$$

Seine Komponenten $v_0(t)$, $d_0(t)$ bzw. $\vec{\mathbf{v}}(t)$, $\vec{\mathbf{d}}(t)$ sind Polynome bzw. Vektorpolynome in t. Die Matrixdarstellung (2) dieses Bewegungsvorgangs lautet

$$\mathrm{B}(t) = \left(\begin{array}{c|ccc} v_0(t)\left[d_0(t)^2 + \vec{\mathbf{d}}(t)\circ\vec{\mathbf{d}}(t)\right] & 0 & 0 & 0 \\ \hline \left[d_0(t)^2 + \vec{\mathbf{d}}(t)\circ\vec{\mathbf{d}}(t)\right]\ \vec{\mathbf{v}}(t) & & v_0(t)\cdot \mathrm{U}(t) & \end{array}\right), \tag{10}$$

die bis auf einen skalaren Faktor orthonormale 3×3-Matrix $\mathrm{U}(t)$ ist dabei durch

$$\mathrm{U}(t)\,\vec{\mathbf{x}} = \left[d_0(t)^2 - \vec{\mathbf{d}}(t)\circ\vec{\mathbf{d}}(t)\right]\vec{\mathbf{x}} + 2\,d_0(t)\left[\vec{\mathbf{d}}(t)\times\vec{\mathbf{x}}\right] + 2\left[\vec{\mathbf{d}}(t)\circ\vec{\mathbf{x}}\right]\vec{\mathbf{d}}(t) \tag{11}$$

erklärt. (Die Matrixdarstellung des Q-Zwanglaufes (9) kann beispielsweise ermittelt werden, indem die Bahnkurve eines Gangsystem festen Punktes $\mathbf{x} = (x_0 \quad \vec{\mathbf{x}}^\top)^\top$ (mit $\vec{\mathbf{x}} = (x_1\ x_2\ x_3)^\top$) bestimmt wird. Diese Kurve erhält man als Bahnkurve des Ursprungs bei dem

[1] Eine weitere Verallgemeinerung wurde von Q.J. Ge und B. Ravani [5] vorgeschlagen: Die Bewegungen werden durch duale Quaternionen beschrieben, allerdings werden diese nur bis auf einen *dualen* Faktor betrachtet. Damit entspricht *jeder* Kurve im P^7 ein zwangläufiger Bewegungsvorgang. Der Einfluß der dualen Faktoren ist jedoch nur schwer abzuschätzen. Ein Grund dafür ist, daß die lineare Interpolation zweier Bewegungen bei Verwendung dieser Methode keineswegs eindeutig ist und die Schraubung, die die beiden Bewegungen ineinander überführt, nicht dargestellt werden kann.

zusammengesetzten Bewegungsvorgang

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(2v_0(t) + \varepsilon\, \vec{\mathbf{v}}(t))}_{\text{Translation}} \quad * \quad \underbrace{(d_0(t) + \vec{\mathbf{d}}(t))}_{\text{Rotation}} \quad * \quad \underbrace{(2x_0 + \varepsilon \vec{\mathbf{x}})}_{\text{Translation im Gangsystem}} \quad * \quad \underbrace{(d_0(t) - \vec{\mathbf{d}}(t))}_{\text{umgekehrte Rotation}} \\
&\quad = 4\, v_0\, (d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}})\, x_0 \\
&\quad + 2\,\varepsilon\, \Big\{ x_0\, (d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}})\, \vec{\mathbf{v}} + v_0\, \Big[(d_0^2 - \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}})\, \vec{\mathbf{x}} + 2\, d_0\, (\vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{x}}) + 2\, (\vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{x}})\, \vec{\mathbf{d}} \Big] \Big\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Durch Vergleich mit (5) läßt sich unmittelbar die Matrixdarstellung (10) ablesen.) Damit gilt:

Satz 1. *Jeder Q–Zwanglauf ist ein zwangläufiger rationaler Bewegungsvorgang.*

Durch weitere Überlegungen ergibt sich, daß die Bahnkurven der Punkte des Gangsystems bei einem Q–Zwanglauf $Q(t) = Q^0(t) + \varepsilon Q^\varepsilon(t)$ vom Polynomgrad k rationale Kurven höchstens $2k$-ter Ordnung sind.
Läßt sich andererseits auch jeder rationale zwangläufige Bewegungsvorgang als Q–Zwanglauf darstellen? Zur Vorbereitung dient das folgende

Lemma 2. *Gegeben seien vier Punkte $\underline{\mathbf{a}}_1$, $\underline{\mathbf{a}}_2$, $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ (durch ihre kartesischen Koordinaten $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2 \in \mathbb{R}^3$), so daß die beiden Dreiecke $\triangle(\underline{\mathbf{a}}_1, \mathbf{0}, \underline{\mathbf{a}}_2)$ und $\triangle(\underline{\mathbf{b}}_1, \mathbf{0}, \underline{\mathbf{b}}_2)$ (wobei $\mathbf{0}$ den Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet) kongruent sind. Dann bildet die durch die Quaternion*

$$\begin{aligned}
R(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2) &= (\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2) * \Big[\det(\underline{\mathbf{a}}^*, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1) + ((\underline{\mathbf{b}}_1 - \underline{\mathbf{a}}^*) \circ \underline{\mathbf{b}}_1) \quad \underline{\mathbf{b}}_2\Big] \\
\textit{mit}\quad \underline{\mathbf{a}}^* &= 2 \left(\frac{(\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2) \circ \underline{\mathbf{a}}_1}{(\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2)} \right) (\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2) - \underline{\mathbf{a}}_1
\end{aligned} \tag{13}$$

beschriebene Drehung den Punkt $\underline{\mathbf{a}}_1$ auf $\underline{\mathbf{b}}_1$ und den Punkt $\underline{\mathbf{a}}_2$ auf $\underline{\mathbf{b}}_2$ ab.

Beweis. Die Drehung (13) wird aus einer Umwendung und einer anschließenden Drehung zusammengesetzt. Die Umwendung

$$U = \underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2 \tag{14}$$

besitzt die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle(\underline{\mathbf{a}}_2, \mathbf{0}, \underline{\mathbf{b}}_2)$ als Achse und bildet den Punkt $\underline{\mathbf{a}}_2$ auf $\underline{\mathbf{b}}_2$ sowie den Punkt $\underline{\mathbf{a}}_1$ auf

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{a}}^* &= 2 \left(\frac{\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2}{||\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2||} \circ \underline{\mathbf{a}}_1 \right) \frac{\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2}{||\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2||} - \underline{\mathbf{a}}_1 \\
&= 2 \left(\frac{(\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2) \circ \underline{\mathbf{a}}_1}{(\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2)} \right) (\underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{b}}_2) - \underline{\mathbf{a}}_1
\end{aligned}$$

ab (vgl. Abbildung 1). Nach Voraussetzung sind dann auch die Dreiecke $\triangle(\underline{\mathbf{a}}^*, \mathbf{0}, \underline{\mathbf{b}}_1)$ und $\triangle(\underline{\mathbf{b}}_1, \mathbf{0}, \underline{\mathbf{b}}_2)$ kongruent. Durch eine Drehung mit der Achse $\mathbf{0} \vee \underline{\mathbf{b}}_2$ kann also $\underline{\mathbf{a}}^*$ auf $\underline{\mathbf{b}}_1$ abgebildet werden. Der Drehwinkel φ dieser Drehung ergibt sich als Winkel zwischen den

Abbildung 1: Die Konstruktion der Drehung.

Normalen der von beiden Dreiecken aufgespannten Ebenen und es gilt

$$
\begin{aligned}
|\sin\varphi| &= \frac{||(\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2) \times (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2)||}{||(\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2)|| \cdot ||(\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2)||} = \frac{\det(\underline{\mathbf{a}}^*, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1) \cdot ||\underline{\mathbf{b}}_2||}{(\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2)}\ , \\
& \text{da} \quad ||(\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2)|| = ||(\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2)|| \\
& \text{und} \quad (\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2) \times (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) = \underbrace{\underline{\mathbf{b}}_2 \circ (\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2)}_{=0} \underline{\mathbf{b}}_1 - ((\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ \underline{\mathbf{b}}_1)\underline{\mathbf{b}}_2\ ,
\end{aligned}
$$

sowie

$$
|\cos\varphi| = \frac{|(\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2)|}{(\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2)}\ .
$$

Die gesuchte Drehung lautet also

$$
\begin{aligned}
D &= 1 + \tan\frac{\varphi}{2}\, \frac{1}{||\underline{\mathbf{b}}_2||}\, \underline{\mathbf{b}}_2 = 1 + \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\, \frac{1}{||\underline{\mathbf{b}}_2||}\, \underline{\mathbf{b}}_2 \\
&= 1 + \frac{(\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) - (\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2)}{\det(\underline{\mathbf{a}}^*, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1)\ ||\underline{\mathbf{b}}_2||}\, \frac{1}{||\underline{\mathbf{b}}_2||}\, \underline{\mathbf{b}}_2 \\
&= 1 + \frac{(\underline{\mathbf{b}}_1 - \underline{\mathbf{a}}^*) \circ \underline{\mathbf{b}}_1}{\det(\underline{\mathbf{a}}^*, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1)}\, \underline{\mathbf{b}}_2\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{da} \quad & (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) - (\underline{\mathbf{a}}^* \times \underline{\mathbf{b}}_2) \circ (\underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2) \\
= \ & (\underline{\mathbf{b}}_1 \circ \underline{\mathbf{b}}_1)(\underline{\mathbf{b}}_2 \circ \underline{\mathbf{b}}_2) - (\underline{\mathbf{b}}_1 \circ \underline{\mathbf{b}}_2)^2 - (\underline{\mathbf{a}}^* \circ \underline{\mathbf{b}}_1)(\underline{\mathbf{b}}_2 \circ \underline{\mathbf{b}}_2) + (\underline{\mathbf{b}}_1 \circ \underline{\mathbf{b}}_2)\ \underbrace{(\underline{\mathbf{a}}^* \circ \underline{\mathbf{b}}_2)}_{= \underline{\mathbf{b}}_1 \circ \underline{\mathbf{b}}_2} \\
= \ & ((\underline{\mathbf{b}}_1 - \underline{\mathbf{a}}^*) \circ \underline{\mathbf{b}}_1)\ (\underline{\mathbf{b}}_2 \circ \underline{\mathbf{b}}_2)\ .
\end{aligned}
$$

Durch Multiplikation der Gesamtbewegung $U * D$ mit dem reellen Faktor $\det(\underline{\mathbf{a}}^*, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1)$ folgt schließlich die Beziehung (13). ■

Nun erhält man unmittelbar den

Satz 3. *Jeder zwangläufige rationale Bewegungsvorgang besitzt eine Darstellung als rationaler Q–Zwanglauf.*

Beweis. Der gesuchte Q–Zwanglauf wird als Zusammensetzung von Translations- und Rotationsanteil (vgl. (9)) konstruiert. Der Translationsanteil ist sofort ein Q–Zwanglauf, da seine Komponenten $v_0(t)$ und $\vec{\mathbf{v}}(t) = (\ v_1(t)\ v_2(t)\ v_3(t)\ )^\top$ in Matrix (2) als Polynome bzw. Vektorpolynome in t vorausgesetzt werden können. Den Rotationsanteil erhält man mit Hilfe von Lemma 2, indem für $\underline{\mathbf{b}}_1 = \underline{\mathbf{b}}_1(t)$ bzw. $\underline{\mathbf{b}}_2 = \underline{\mathbf{b}}_2(t)$ beispielsweise die normierten Richtungsvektoren der x- bzw. der y-Achse des Gangsystems und für $\underline{\mathbf{a}}_1$ bzw. $\underline{\mathbf{a}}_2$ die entsprechenden Vektoren im Rastsystem gewählt werden. Nach einigen Rechnungen kann auch hier eine Darstellung als rationaler Q–Zwanglauf gefunden werden, da auf der rechten Seite der Gleichung (13) nur rationale Funktionen der Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2$ auftreten. ■

Der Beweis des Satzes ist zwar konstruktiv, über den Polynomgrad des Q–Zwanglaufes, mit dem der gegebene zwangläufige rationale Bewegungsvorgang beschrieben werden kann, läßt sich jedoch noch keine brauchbare Aussage gewinnen. Dieser Polynomgrad wird im folgenden Abschnitt näher untersucht, um eine allgemeine Darstellungsformel für rationale Zwangläufe fester Ordnung zu gewinnen:

3. Der Zusammenhang zwischen zwangläufigen rationalen Bewegungsvorgängen und Q–Zwangläufen

Im folgenden sei ein zwangläufiger rationaler Bewegungsvorgang der Ordnung m durch seine Darstellung als Q–Zwanglauf

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left[2v_0(t) + \varepsilon\,\vec{\mathbf{v}}(t)\right] * \left[d_0(t) + \vec{\mathbf{d}}(t)\right] \\ &= \underbrace{\left[\ 2v_0(t) + \varepsilon \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}\ \right]}_{\text{Translationsanteil}} * \underbrace{\left[\ d_0(t) + \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix}\ \right]}_{\text{Rotationsanteil}} \end{aligned} \tag{15}$$

(vgl. Satz 3) gegeben. Nach Voraussetzung sind dann sämtliche Elemente der Matrixdarstellung (10) dieses Q–Zwanglaufes Polynome in t, deren Polynomgrad nach Ausklammern von eventuell auftretenden gemeinsamen Faktoren nicht größer als m sein darf.
O.B.d.A. können sowohl die Komponenten $d_i = d_i(t)$ des Rotationsanteils ($i = 0, 1, 2, 3$) als auch die des Translationsanteils von (15) als jeweils teilerfremd vorausgesetzt werden, d.h. es gelte

$$\text{g.g.T.}(d_0(t), d_1(t), d_2(t), d_3(t)) = \text{g.g.T.}(v_0(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t)) = 1\ . \tag{16}$$

Da die Bahnkurve des Ursprungs des Rastsystems höchstens den Polynomgrad m besitzt, sind die vier Komponenten $v_i = v_i(t)$ des Translationsanteils Polynome in t vom Höchstgrad m $(i = 0, 1, 2, 3)$. Es bleibt noch zu klären, welche Einschränkungen sich an den Polynomgrad des Rotationsanteils von (15) ergeben.
Jeder skalare Faktor $\xi = \xi(t)$, der sich aus der Matrix (10) ausklammern läßt, teilt das Polynom $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$ (vgl. die erste Spalte der Matrix !). Weiterhin gilt das folgende

Lemma 4. *Falls die Matrix* $\mathrm{U}(t)$ *(siehe (11)) und das Polynom* $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$ *gemeinsame Linearfaktoren besitzen, so teilen diese bereits die vier einzelnen Komponenten* $d_i = d_i(t)$ *des Rotationsanteils des gegebenen rationalen Bewegungsvorgangs (15).*

Beweis. Sei $(t - t_0)$ $(t_0 \in \mathbb{C})$ ein gemeinsamer Linearfaktor des Rotationsanteils $\mathrm{U}(t)$ (vgl. (11)) und des Polynoms $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$. Dann gilt für alle $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ an der Stelle $t = t_0$ die Gleichung

$$\mathrm{U}(t)\cdot\vec{\mathbf{x}}\Big|_{t=t_0} = \Big[(d_0(t))^2 - \vec{\mathbf{d}}(t) \circ \vec{\mathbf{d}}(t) \Big]\, \vec{\mathbf{x}} + 2\, d_0(t)\, (\vec{\mathbf{d}}(t) \times \vec{\mathbf{x}}) + 2\, (\vec{\mathbf{d}}(t) \circ \vec{\mathbf{x}})\, \vec{\mathbf{d}}(t)\Big|_{t=t_0} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Für $\vec{\mathbf{x}}_1 = (\,1\;0\;0\,)^\top$, $\vec{\mathbf{x}}_2 = (\,0\;1\;0\,)^\top$ bzw. $\vec{\mathbf{x}}_3 = (\,0\;0\;1\,)^\top$ ergeben sich aus der ersten, zweiten bzw. dritten Komponente von (17) die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} d_0^2 + d_1^2 - d_2^2 - d_3^2\Big|_{t=t_0} = 0 \quad , \qquad d_0^2 - d_1^2 + d_2^2 - d_3^2\Big|_{t=t_0} = 0 \\ \text{und} \quad d_0^2 - d_1^2 - d_2^2 + d_3^2\Big|_{t=t_0} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (18)$$

Durch Addition von jeweils zwei dieser drei Gleichungen folgt

$$d_0^2\Big|_{t=t_0} = d_1^2\Big|_{t=t_0} = d_2^2\Big|_{t=t_0} = d_3^2\Big|_{t=t_0} \quad . \quad (19)$$

Da nach Voraussetzung auch das Polynom $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$ von $(t - t_0)$ geteilt wird, muß dieser Linearfaktor bereits in den vier einzelnen Komponenten d_i des Rotationsanteils von (15) enthalten sein. ■

Aus diesem Lemma und der Voraussetzung (16) erhält man unmittelbar die

Folgerung 5. *Falls sich aus der Matrixdarstellung (10) des gegebenen zwangläufigen Bewegungsvorgangs (15) ein gemeinsamer Faktor* $\xi = \xi(t)$ *aller Komponenten ausklammern läßt, so ist dieser Faktor sowohl in* $v_0(t)$ *als auch in* $d_0^2(t) + \vec{\mathbf{d}}(t) \circ \vec{\mathbf{d}}(t)$ *enthalten.*

Beweis. Der skalare Faktor $\xi(t)$ wird natürlich auch aus $v_0(t)\,\mathrm{U}(t)$ ausgeklammert. Wegen (16) ist $\xi(t)$ ein Teiler des Polynoms $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$. Nach Lemma 4 kann der Faktor $\xi(t)$ nicht gleichzeitig auch noch als gemeinsamer Faktor der Komponenten von $\mathrm{U}(t)$ auftreten, deshalb muß er bereits in v_0 enthalten sein. ■

Falls der Polynomgrad des Rotationsteils des gegebenen zwangläufigen Bewegungsvorgangs (15) „echt“ den Polynomgrad k besitzt, so beträgt der Polynomgrad der Matrix (10) also stets mindestens $2k$. (Das Polynom $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$ hat für reelle Polynome d_0 und $\vec{\mathbf{d}}$ dann stets mindestens den Polynomgrad 2k. Außerdem ist der Faktor $\xi(t)$, der (unter anderem) aus $v_0(d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}})$ ausgeklammert wird, bereits in v_0 enthalten.) Damit kann der Rotationsanteil höchstens den Polynomgrad $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ besitzen[2], und es gilt der folgende

Satz 6. *Jeder zwangläufige rationale Bewegungsvorgang der Ordnung m läßt sich in der Form (15) darstellen, wobei der Translationsanteil höchstens den Polynomgrad m und der Rotationsanteil höchstens den Polynomgrad $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ besitzt. Somit besitzt jeder zwangläufige rationale Bewegungsvorgang der Ordnung m eine Darstellung als Q–Zwanglauf vom Polynomgrad $m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.*

4. Eine allgemeine Darstellung für rationale Zwangläufe fester Ordnung

Sei weiterhin ein zwangläufiger rationaler Bewegungsvorgang der Ordnung m durch den Q–Zwanglauf (15) gegeben, wobei die Komponenten des Translations- und des Rotationsanteils wieder als jeweils teilerfremd (vgl. (16)) vorausgesetzt werden. Dabei soll der Polynomgrad des Rotationsanteils den Wert k besitzen ($k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$).
Es wird angenommen, daß sich aus der Matrixdarstellung (10) des Bewegungsvorgangs ein gemeinsamer Faktor $\xi(t)$ aller Komponenten ausklammern läßt, der Polynomgrad dieses Faktors sei gleich l. Dann beträgt der Grad der Polynome $v_i(t)$ höchstens $m + l - 2k$.
Nach Folgerung 5 teilt der gemeinsame Faktor $\xi(t)$ aller Komponenten der Matrix (10) sowohl das Polynom $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$ als auch das Polynom $v_0(t)$. Es gilt also

$$v_0(t) = \xi(t) v_0^*(t) \quad \text{und} \quad d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}} = \xi(t)\varphi(t) \tag{20}$$

wobei $v_0^*(t)$ bzw. $\varphi(t)$ ein Polynom vom Höchstgrad $m - 2k$ bzw. $2k - l$ in t ist.
Die Matrixdarstellung (10) des rationalen Bewegungsvorgangs vereinfacht sich damit zu

$$\mathrm{B}(t) = \xi(t) \left(\begin{array}{c|ccc} v_0^*(t) \cdot \left[d_0(t)^2 + \vec{\mathbf{d}}(t) \circ \vec{\mathbf{d}}(t) \right] & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varphi(t)\, v_1(t) & & & \\ \varphi(t)\, v_2(t) & & v_0^*(t) \cdot \mathrm{U}(t) & \\ \varphi(t)\, v_3(t) & & & \end{array} \right) . \tag{21}$$

(Die 3×3-Matrix $\mathrm{U} = \mathrm{U}(t)$ wurde in (11) eingeführt.)
Die Darstellungen (21) für $l = 0, \ldots, 2k$ sind sämtlich als Spezialfälle in der für $l = 2k$ (d.h. für $\xi = d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$ und $\varphi(t) \equiv 1$) entstehenden Formel enthalten: Die Matrixdarstellung (21) für ein festes l ergibt sich, falls das (nun nicht mehr als zu v_0 teilerfremd vorausgesetzte) Vektorpolynom $\vec{\mathbf{v}}(t)$ den skalaren Faktor $\varphi(t)$ vom Polynomgrad $2k{-}l$ mit $d_0^2{+}\vec{\mathbf{d}}{\circ}\vec{\mathbf{d}}$ gemeinsam hat. Zusammenfassend gilt der folgende

[2] Mit $\lfloor z \rfloor$ wird hier die größte ganze Zahl kleiner oder gleich z bezeichnet

Satz 7. *Die rationalen Bewegungsvorgänge der Ordnung m lassen sich nach dem Polynomgrad k des Rotationsanteils ihrer Darstellung (15) in $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ Klassen einteilen. Für Bewegungsvorgänge, bei denen dieser Polynomgrad gleich k ist, gilt die Matrixdarstellung*

$$\mathrm{B}_k^{(m)}(t) = \left(\begin{array}{c|ccc} v_0^*(t) \cdot \left[d_0(t)^2 + \vec{\mathbf{d}}(t) \circ \vec{\mathbf{d}}(t) \right] & 0 & 0 & 0 \\ \hline v_1(t) & & & \\ v_2(t) & & v_0^*(t) \cdot \mathrm{U}(t) & \\ v_3(t) & & & \end{array} \right) \tag{22}$$

($k = 0, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$). Dabei besitzt das Polynom $d_0(t)$ wie auch das Vektorpolynom $\vec{\mathbf{d}}(t)$ den Grad k, das Polynom $v_0^*(t)$ hat den Höchstgrad $m-2k$ und die drei Polynome $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ sind höchstens vom Polynomgrad m in t.

Dieser Satz schließt an die Ergebnisse von W. Wunderlich [14] und O. Röschel [11] [12] an: Für $m = 2$ ergeben sich quadratische Schiebungen ($k = 0$) oder Darboux–Zwangläufe ($k = 1$). Die Darboux–Zwangläufe sind die allgemeinsten echt räumlichen Zwangläufe mit durchweg ebenen Bahnen. Sie entstehen durch Überlagerung einer ebenen Ellipsenbewegung, bei der ein Drehzylinder in einem zweiten, doppelt so großen Drehzylinder abrollt, mit einer harmonischen Schwingung in Achsenrichtung. Ihre Matrixdarstellung $B_1^{(2)}$ stimmt im wesentlichen (d.h. bis auf Wahl der Koordinatensysteme und gebrochen-lineare Parametertransformationen) mit der in [12, Teil 1, Gl. (19)] angegebenen überein.
Im Fall $m = 3$ kann k die Werte $k = 0$ (im Falle kubischer Schiebungen) oder $k = 1$ annehmen. Von W. Wunderlich [14, Satz 8] wurde festgestellt, daß sich die kubischen Zwangläufe im Fall $k = 1$ als Überlagerung einer Darboux–Bewegung mit einer geradlinigen Schiebung auffassen lassen. Im allgemeinen Fall verlaufen dabei sämtliche Bahnkurven durch einen festen Fernpunkt. Die Matrixdarstellung $B_1^{(3)}$ ist im wesentlichen äquivalent zu der in [14, Gl.(10.2)] gefundenen.
Im Fall $m = 4$ sind die Werte $k = 0$ (im Falle quartischer Schiebungen), $k = 1$ oder $k = 2$ möglich. Für $k = 1$ ergeben sich die von O. Röschel [11] als Fall (b) untersuchten Zwangläufe. Nach [11, Satz 2] sind diese Bewegungsvorgänge die Überlagerung einer stetigen Drehung mit einer Schiebung längs einer rationalen Raumkurve vierter Ordnung. Im allgemeinen Fall verlaufen dabei sämtliche Bahnkurven durch zwei feste, reelle oder aber konjugiert-komplexe Fernpunkte. Weiterhin liefert $k = 2$ die von O. Röschel [11] als Fall (a) betrachteten Zwangläufe. Der sphärische Anteil dieser Bewegungen ist die sogenannte *sphärische Zwillingskurbelbewegung*, bei der zwei kongruente quadratische Kegel aufeinander abrollen (vgl. [13]). Nach [11, Satz 1] entsteht die Gesamtbewegung durch Überlagerung einer sphärischen Zwillingskurbelbewegung mit einer Schiebung längs einer rationalen Kurve vierter Ordnung. Auch hier entsprechen die Matrixdarstellungen $B_1^{(4)}$ bzw. $B_2^{(4)}$ im wesentlichen den Gleichungen [11, (1.8)] und [11, (1.6)].
Im allgemeinen Fall entsteht die Gesamtbewegung als Zusammensetzung eines sphärischen rationalen Zwanglaufes $2k$-ter Ordnung mit einer Schiebung längs einer rationalen Raumkurve der Ordnung m. Dabei verlaufen die Bahnkurven durch $m - 2k$ feste (evtl. komplexe) Fernpunkte, die auch mehrfach auftreten können. Diese Fernpunkte entsprechen den Nullstellen des Polynoms $v_0^*(t)$.

5. Rationale Bewegflächen und ihre kinematische Erzeugung

Mit Hilfe von rationalen Bewegungsvorgängen (22) der Ordnung m lassen sich sämtliche rationalen Bewegflächen vom Polynomgrad (m, n) konstruieren, deren Profilkurve (vom Polynomgrad n) nicht ganz in einer Ebene enthalten ist (vgl. [12]). Dieses Ergebnis läßt sich auf Bewegflächen mit ebener Profilkurve übertragen: O.B.d.A. sei die Profilkurve in der xy–Ebene des Gangsystems enthalten. Falls die Profilkurve nicht zu einer Geraden entartet ist, dann besitzen die Bahnkurven der Punkte der xy–Ebene höchstens die Ordnung m. Ähnlich wie bei Lemma 4 kann gezeigt werden, daß sämtliche Linearfaktoren, die sich aus den ersten beiden Spalten der Matrix $\mathrm{U}(t)$ (vgl. (11)) und aus dem Polynom $d_0^2 + \vec{\mathbf{d}} \circ \vec{\mathbf{d}}$ ausklammern lassen, bereits die vier Komponenten $d_i = d_i(t)$ des Rotationsanteils des gegebenen Q–Zwanglaufes (15) teilen müssen. Die weiteren Überlegungen können somit direkt auf Bewegflächen mit ebener Profilkurve übertragen werden und man erhält die

Folgerung 8. *Jede rationale Bewegfläche $\mathbf{x}(t,v)$, deren Parameterlinien ein kinematisches Netz bilden und deren Profilkurve $\mathbf{p}(v)$ nicht zu einer Geraden entartet ist, läßt sich in der Form*

$$\mathbf{x}(t,v) = \mathrm{B}_k^{(m)}(t) \cdot \mathbf{p}(v) \qquad (0 \le k \le \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor) \tag{23}$$

(vgl. (22)) darstellen.

Die Konstruktion rationaler Kurven und Flächen mit Hilfe von zwangläufigen Bewegungsvorgängen wird in [8] untersucht. Dort wird auch ein detaillierter Beweis der Folgerung 8 gegeben.

6. Sphärische und ebene rationale Zwangläufe

Als Spezialfall ergibt sich aus Satz 6 für $v_0 \equiv 0.5$ und $v_1 \equiv v_2 \equiv v_3 \equiv 0$ eine allgemeine Darstellung für sphärische rationale Zwangläufe fester Ordnung: Jeder sphärische rationale Zwanglauf der Ordnung $2k$ kann durch einen Q–Zwanglauf $Q(t) = d_0(t) + \vec{\mathbf{d}}(t)$ vom Polynomgrad k, dessen Dualteil verschwindet, beschrieben werden.

Die Achsenflächen eines rationalen sphärischen Zwanglaufes der Ordnung $2k$ sind zwei rationale Kegelflächen, die während des Zwanglaufes aufeinander abrollen. Diese Achsenflächen können aus der Quaternionendarstellung bestimmt werden [1, S. 16] und es ergibt sich unmittelbar, daß sie als rationale Flächen vom Polynomgrad $(1, 2k-2)$ dargestellt werden können. Für $k = 2$ ist diese Tatsache bereits bekannt (vgl.[2, 332f.]): Die rationalen sphärischen Zwangläufe der Ordnung 4 werden als *sphärische Zwillingskurbelbewegungen* bezeichnet [13]. Sie entstehen durch zwei aufeinander abrollende kongruente quadratische Kegel.

Die Darstellung (22) für rationale Bewegungen fester Ordnung steht in engem Zusammenhang zu den Methoden, die von R. Dietz u.a. [3] [4] zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken entwickelt wurden: Als Bahnkurve des Punktes $(\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^\top$ bei einem sphärischen rationalen Zwanglauf $Q(t) = d_0(t) + \vec{\mathbf{d}}(t)$ entsteht gerade die Darstellungsformel,

die 1868 von V. A. Lebesgue für „pythagoräische Quadrupel“ (d.h. Lösungen der Gleichung $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) im Ring der ganzen Zahlen gefunden wurde [9].
In [3] wurde gezeigt, daß (ggf. nach Multiplikation der homogenen Koordinaten mit (-1)) jede irreduzible rationale Kurve und Fläche auf der Einheitskugel in dieser Form dargestellt werden kann. Während die Darstellungsformel in [3] und [7] als Verallgemeinerung der stereographischen Projektion aufgefaßt wurde, erhält man nun eine kinematische Deutung:

Folgerung 9. *Jede rationale Kurve vom Polynomgrad $2k$ auf der Einheitskugel ($k > 1$) läßt sich als Bahnkurve eines Punktes bei einem sphärischen rationalen Zwanglauf der Ordnung $2k$ erzeugen. Die Achsenflächen dieses Bewegungsvorgangs sind zwei rationale Kegelflächen, die höchstens den Polynomgrad $(1, 2k-2)$ besitzen.*

Beispielsweise folgt für $k = 2$, daß sich jede quartische sphärische rationale Kurve als Bahnkurve eines Punktes bei einer sphärischen Zwillingskurbelbewegung erzeugen läßt.
Als weitere Spezialfälle ergeben sich aus den Sätzen 6 und 7 auch Darstellungen für ebene rationale Zwangläufe ($v_3(t) \equiv d_1(t) \equiv d_2(t) \equiv 0$) sowie für rationale Zylinderschrotungen ($d_1(t) \equiv d_2(t) \equiv 0$).

Literatur

[1] Blaschke, W.: Kinematik und Quaternionen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

[2] Bottema, O., und B. Roth: Theoretical Kinematics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford 1979.

[3] Dietz, R., J. Hoschek und B. Jüttler: An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics. Computer–Aided Geom. Design **10** (1993), im Druck.

[4] Dietz, R., J. Hoschek und B. Jüttler: Rational Patches on Quadric Surfaces. erscheint in Computer-Aided Design.

[5] Ge, Q. J., und B. Ravani: Computer Aided Geometric Design of Motion Interpolants. Proc. ASME Design Automation Conf., DE-Vol. **32-2** (1991), 33–41.

[6] Hoschek, J., und D. Lasser: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung. Teubner, Stuttgart (2. Aufl.) 1992.

[7] Jüttler, B.: Zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken. Journal of Geometry **47** (1993), 53–64.

[8] Jüttler, B.: Zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen mit Hilfe einparametriger Bewegungsvorgänge. Dissertation, TH Darmstadt, geplant für 1994.

[9] Lebesgue, V. A.: Sur une identité qui conduit à toutes les solutions de l'equation $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris **66** (1868), 396–398.

[10] Mick, S., und O. Röschel: Interpolation of helical patches by kinematic rational Bézier patches. Comput. & Graphics **14** (1990), 275–280.

[11] Röschel, O.: Rationale räumliche Zwangläufe vierter Ordnung. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. **194** (1985), 185–202.

[12] Röschel, O.: Kinematic rational Bézier patches I, II. Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. (1993), im Druck.

[13] Tölke, J.: Zu den Erzeugungsweisen der Paraboloide durch Kegelschnitte. Arch. Math. **38** (1982), 65–74.

[14] Wunderlich, W.: Kubische Zwangläufe. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. **193** (1984), 45–68.