ZUR KONSTRUKTION RATIONALER KURVEN UND FLÄCHEN AUF QUADRIKEN

Herrn Professor Dr. Oswald Giering zum 60. Geburtstag gewidmet

Bert Jüttler

The paper presents a powerful construction of rational curves and surfaces on quadric surfaces. These curves and surfaces are considered as solutions of certain diophantic equations in polynomial rings. A representation formula from number theory gives rise to a generalization of stereographic projection. The paper discusses the properties of this map. Some connections to advanced geometry and to the foundations of geometry are outlined.

Im *Computer Aided Geometric Design* werden Kurven und Flächen meist mit Hilfe von polynomialen oder rationalen Parameterdarstellungen beschrieben. Die Arbeit stellt ein Verfahren zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken vor. Solche Kurven und Flächen lassen sich als Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen in Polynomringen auffassen, für diese Lösungen sind Darstellungsformeln aus der Zahlentheorie bekannt.

Die Darstellungsformeln geben zu einer Verallgemeinerung der stereographischen Projektion Anlaß. Im Mittelpunkt der Arbeit steht die Untersuchung der Eigenschaften dieser verallgemeinerten stereographischen Projektion. Dabei ergeben sich interessante Querverbindungen zur Liniengeometrie (insbesondere zur Theorie der linearen Kongruenzen) und zu den Grundlagen der Geometrie (Satz von Miquel).

Der erste Abschnitt gibt eine kurze Einführung und stellt die Darstellungsformeln aus der Zahlentheorie bereit. Daran anschließend wird im zweiten bzw. dritten Abschnitt die verallgemeinerte stereographische Projektion auf die Kugel bzw. auf das hyperbolische Paraboloid untersucht.

Den folgenden Überlegungen liegt der reelle euklidische Raum E^3 zugrunde, der durch Hinzunahme der Fernpunkte projektiv abgeschlossen wird. Gelegentlich wird auch die komplexe Erweiterung dieses Raumes herangezogen. Die Punkte des $\bar{E}^3$ werden durch *homogene Koordinatenvektoren* $\mathbf{p} = (\, p_0\, p_1\, p_2\, p_3\,)^\top \in\ \mathbb{R}^4$ beschrieben. Die zugehörigen *kartesischen Koordinaten* von eigentlichen, d.h. im Endlichen liegenden Punkten erhält man nach Division durch die $0-$ten Komponenten:

$$\underline{\mathbf{p}} = \frac{1}{p_0}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad (p_0 \neq 0). \tag{1}$$

Die Parameterdarstellungen

$$\mathbf{x}(t) \;=\; \sum_{j=0}^{n} B_j^n(t)\ \mathbf{b}_j \quad (\, t \in [0,1]\,) \quad \text{bzw.} \tag{2}$$

$$\mathbf{y}(u,v) \;=\; \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v)\ \mathbf{c}_{i.j} \quad (\,(u,v) \in [0,1]^2\,) \tag{3}$$

beschreiben ein Segment einer *rationalen Bézierkurve* vom Grad n bzw. ein Stück einer *rationalen (Tensorprodukt-) Bézierfläche* vom Grad (m,n). Die Koordinatenfunktionen dieser Parameterdarstellungen sind (in homogenen Koordinaten !) Polynome, die bezüglich der Basis der Bernsteinpolynome

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \tag{4}$$

dargestellt werden. Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß die vektorwertigen Koeffizienten $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbf{c}_{i.j} \in \mathbb{R}^4$, die sogenannten *Steuer-* oder *Kontrollpunkte*, geometrische Bedeutung besitzen (siehe z.B. [11]).
In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Konstruktion von rationalen Bézierkurven und -flächen auf Quadriken vorgestellt. Stellvertretend für alle weiteren nichtentarteten Quadriken wird im ersten Teil die *Einheitskugel K*

$$k_0^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \tag{5}$$

und im zweiten Teil das (normierte) *hyperbolische Paraboloid H*

$$h_0\, h_3 = h_1\, h_2 \tag{6}$$

diskutiert. Alle weiteren nichtentarteten Quadriken ergeben sich als Bild der Einheitskugel oder des hyperbolischen Paraboloids unter einer geeigneten projektiven Abbildung.
Die Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken wurde im *Computer Aided Geometric Design* bereits von verschiedensten Gesichtspunkten aus untersucht ([3] [8] [9] [16] u.a.). Dem hier vorgestellten Verfahren liegt ein algebraischer Ansatz aus [12] und [13] zugrunde: Die rationalen Kurven bzw. Flächen werden als Lösungen der diophantischen Gleichungen (5) und (6) in den Polynomringen $\mathbb{R}[\mathrm{t}]$ bzw. $\mathbb{R}[\mathrm{u},\mathrm{v}]$ aufgefaßt. (Dabei bedeutet $\mathcal{R}[.]$ die Adjunktion eines Elementes zu einem Ring $\mathcal{R}$.) Für teilerfremde Lösungen der Gleichungen (5) und (6) sind aus der

Zahlentheorie die beiden Darstellungsformeln

$$\begin{array}{rclrcl} k_0 & = & \pm(p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2) & k_1 & = & 2\,p_0\,p_1 - 2\,p_2\,p_3 \\ k_2 & = & 2\,p_0\,p_2 + 2\,p_1\,p_3 & k_3 & = & p_1^2+p_2^2-p_0^2-p_3^2 \end{array} \tag{7}$$

und

$$\begin{array}{rclrcl} h_0 & = & q_0\,q_3 & h_1 & = & q_1\,q_3 \\ h_2 & = & q_0\,q_2 & h_3 & = & q_1\,q_2 \end{array} \tag{8}$$

bekannt: Jede Lösung der Gleichung (5) bzw. (6) im Polynomring $\mathbb{R}[t]$ oder $\mathbb{R}[u,v]$, bei der die Komponenten k_i bzw. h_i teilerfremd sind, läßt sich mit geeigneten Ansatzfunktionen p_i bzw. q_i aus den Polynomringen $\mathbb{R}[t]$ oder $\mathbb{R}[u,v]$ in der Form (7) bzw. (8) darstellen. Die Darstellung (7) für „pythagoräische Quadrupel“ im Ring der ganzen Zahlen wurde bereits 1868 von V.A. Lebesgue gefunden [4][14]. Im Jahre 1992 gelang R. Dietz die Verallgemeinerung auf Polynomringe und die Herleitung der analogen Formel (8) für das hyperbolische Paraboloid [5].
Im Mittelpunkt der beiden folgenden Kapitel wird die Untersuchung der *geometrischen* Eigenschaften der Darstellungsformeln (7) und (8) stehen. Dazu werden sie als Abbildungen $\bar{E}^3 \to K$ und $\bar{E}^3 \to H$ aufgefaßt. Diese Abbildungen erweisen sich als natürliche Verallgemeinerungen der stereographischen Projektion auf Quadriken.

2 DIE VERALLGEMEINERTE STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION AUF DIE EINHEITSKUGEL

Zur Untersuchung der *geometrischen* Eigenschaften der Darstellungsformel (7) für rationale Kurven und Flächen auf der Einheitskugel K wird diese als Abbildung aufgefaßt:

DEFINITION. *Die Abbildung* $\delta : \bar{E}^3 \to K : \mathbf{p} \mapsto \delta(\mathbf{p})$ *mit*

$$\delta(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2 \\ 2\,p_0\,p_1 - 2\,p_2\,p_3 \\ 2\,p_0\,p_2 + 2\,p_1\,p_3 \\ p_1^2+p_2^2-p_0^2-p_3^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

heißt verallgemeinerte stereographische Projektion auf die Einheitskugel.

Die Berechtigung dieser Bezeichnung wird sich noch herausstellen (siehe Satz 2).
Im weiteren werden o.B.d.A. nur solche rationalen Kurven und Flächen auf der Kugel K betrachtet, bei denen die 0-te Komponente k_0 stets positiv ist und die Komponenten keine gemeinsamen Linearfaktoren besitzen, deren Darstellung also irreduzibel ist. (Durch Multiplikation mit (-1) bzw. durch Kürzen der gemeinsamen Linearfaktoren läßt sich das stets erreichen.)
Jede teilerfremde Lösung der diophantischen Gleichung (5) besitzt eine Darstellung der Form (7). Damit folgt aus der Definition (9) sofort der

SATZ 1. *Jede irreduzible rationale Bézierkurve vom Grad* $2n$ *auf der Kugel* K *ist das Bild einer rationalen Bézierkurve vom Grad* n *im* $\bar{E}^3$ *unter* δ. *Jede irreduzible rationale Bézierfläche vom Grad* $(2m, 2n)$ *ist das Bild einer rationalen Bézierfläche vom Grad* (m, n) *unter* δ.

Die Standardmethode zur Konstruktion rationaler Parameterdarstellungen von Quadriken ist die stereographische Projektion (siehe z.B. [10, S. 372 ff.]). Sie ist als Spezialfall in (9) enthalten:

SATZ 2. *Die Einschränkung der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ auf die „Äquatorebene“ P der Einheitskugel ($p_3 = 0$) ist die stereographische Projektion $\sigma : P \to K$ mit dem Zentrum* $\mathbf{z} = (\,1\,0\,0\,1\,)^\top$.

BEWEIS. Die stereographische Projektion σ ordnet jedem Punkt $\mathbf{p} = (\,p_0\,p_1\,p_2\,0\,)^\top$ der Äquatorebene P den von $\mathbf{z}$ verschiedenen Schnittpunkt $\sigma(\mathbf{p})$ der Kugel K mit der Geraden durch $\mathbf{z}$ und $\mathbf{p}$ zu. Dieser Punkt besitzt die Koordinaten

$$\sigma(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 \\ 2\,p_0\,p_1 \\ 2\,p_0\,p_2 \\ p_1^2 + p_2^2 - p_0^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Nach Vergleich von (9) und (10) folgt unmittelbar die Behauptung. ■

Abbildung 1: Die verallgemeinerte stereographische Projektion δ auf die Kugel.

Die Eigenschaften der stereographischen Projektion auf die Kugel, wie etwa Kreis- und Winkeltreue, sind natürlich bereits bestens bekannt. Das legt es nahe, die verallgemeinerte stereographische Projektion $\delta : \bar{E}^3 \to K$ als Zusammensetzung einer weiteren Abbildung $\vartheta : \bar{E}^3 \to P$ mit der stereographischen Projektion $\sigma : P \to K$ zu betrachten:

SATZ 3. *Die verallgemeinerte stereographische Projektion δ ist die Zusammensetzung der Abbil-*

dung $\vartheta : \bar{E}^3 \to P : \mathbf{p} \mapsto \vartheta(\mathbf{p})$

$$\vartheta(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} p_0^2 + p_3^2 \\ p_0\, p_1 - p_2\, p_3 \\ p_0\, p_2 + p_1\, p_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

mit der stereographischen Projektion σ, *d.h. es gilt* $\delta = \sigma \circ \vartheta$ *(siehe Abbildung 1).*

Der Beweis folgt unmittelbar aus $\vartheta = \sigma^{-1} \circ \delta$ mit Hilfe der Umkehrung der stereographischen Projektion $\sigma^{-1} : K \to P : (\, k_0\, k_1\, k_2\, k_3\,)^\top \mapsto (\ (k_0 - k_3)\ \ k_1\ \ k_2\, 0\ \,)^\top$.
Durch die Zerlegung $\delta = \sigma \circ \vartheta$ ist es nun möglich, die geometrischen Eigenschaften der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ auf die der Abbildung ϑ zurückzuführen. Zunächst wird das Urbild eines Punktes $\mathbf{p} \in P$ unter der Abbildung ϑ untersucht:

LEMMA 4. *Das Urbild des Punktes* $\mathbf{p} = (\, p_0\, p_1\, p_2\, 0\,)^\top \in P$ *unter der Abbildung* ϑ *ist die Gerade*

$$\lambda \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ -p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \tag{12}$$

Damit ist diese Gerade das Urbild des Punktes $\mathbf{k} \in K$ *mit* $\mathbf{p} = \sigma^{-1}(\mathbf{k})$ *unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion* δ.

Durch jeden Punkt des Raumes $\bar{E}^3$ verläuft genau eine Gerade (12). Diese Geraden werden im folgenden als *projizierende Geraden* der Abbildung ϑ bezeichnet. Sie bilden eine zweiparametrige Geradenschar. Die Geraden dieser Schar (12) liegen rotationssymmetrisch zur z-Achse $(\,1\,0\,0\,\lambda\,)^\top$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ des Koordinatensystems und sie schneiden die Äquatorebene P in ihrem Bild unter ϑ. Die Untersuchung der Geradenschar (12) mit Mitteln der klassischen Liniengeometrie (siehe beispielsweise [10, S. 231 ff.]) liefert den

SATZ 5. *Die projizierenden Geraden (12) bilden eine elliptische lineare Kongruenz (bzw. ein elliptisches Netz) von Geraden.*

BEWEIS. Alle Geraden der Schar (12) verlaufen durch die beiden konjugiert-hochimaginären Brenngeraden

$$\xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \zeta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}). \tag{13}$$

(Für $\lambda = 1$ und $\mu = \pm i$ ergibt (12) jeweils einen Punkt der zwei Brenngeraden.) Damit bildet die Geradenschar (12) eine elliptische lineare Kongruenz. ■

Eine sehenswerte Abbildung einer elliptischen linearen Kongruenz findet man in [18, S. 175].

Die Abbildung ϑ bildet jeden Punkt des $\bar{E}^3$ auf den Schnittpunkt der durch ihn verlaufenden Geraden der linearen Kongruenz (12) mit der Mittelebene P dieser Kongruenz ab. Eine solche Abbildung wird als *Netzprojektion* (vgl. [7]) bezeichnet:

FOLGERUNG 6. *Die Abbildung ϑ ist eine Netzprojektion bezüglich des elliptischen Links-Drehnetzes (12).*

Lineare Kongruenzen und dadurch vermittelte Netzprojektionen wurden zunächst im Zusammenhang mit kinematischen Fragestellungen untersucht [2] [15]: Ordnet man bei einer Schraubung um die z-Achse jedem Punkt der Ebene $p_3 = 0$ die Tangente seiner Bahnkurve bei der Schraubung zu, so bildet die aus diesen Tangenten bestehende Geradenschar ein elliptisches Drehnetz. Je nach Orientierung der Schraubung unterscheidet man zwischen Links- und Rechts-Drehnetzen. Die durch das Netz vermittelte Netzprojektion läßt sich zur Entwicklung einer konstruktiven Geometrie für Schraubenlinien verwenden.
Eine weitere interessante Deutung der Netzprojektion ergibt sich aus der elliptischen Geometrie: Der dreidimensionale projektive Raum wird durch Auszeichnung der nullteiligen Absolutquadrik

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{14}$$

zu einem elliptischen Cayley-Klein-Raum. Die beiden Brenngeraden (13) der linearen Kongruenz (12) gehören zu den Erzeugenden der Absolutquadrik (14). Damit sind die projizierenden Geraden (12) der Netzprojektion ϑ die Clifford-Links-Parallelen (siehe [10, S. 253 ff.]) der z-Achse $(1\,0\,0\,\lambda)^\top$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ des Koordinatensystems. In diesem Sinne ist die Netzprojektion ϑ eine Parallelprojektion bezüglich des Clifford-Parallelismus im elliptischen Raum [17].
Die folgende Übersicht faßt einige Eigenschaften der Netzprojektion ϑ und die sich daraus ergebenden Eigenschaften der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ zusammen (vgl. [7]):

- Das Urbild eines Kreises in der Ebene P unter der Netzprojektion ϑ (und damit auch eines nicht durch $\mathbf{z}$ verlaufenden Kreises auf der Kugel K unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ) ist ein einschaliges Hyperboloid im $\bar{E}^3$.
Das Urbild einer Geraden in der Ebene P unter der Netzprojektion ϑ (und damit eines durch $\mathbf{z}$ verlaufenden Kreises auf der Kugel K unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ) ist ein hyperbolisches Paraboloid im $\bar{E}^3$.

- Das Bild einer nichtprojizierenden Geraden im $\bar{E}^3$ unter der Netzprojektion ϑ ist ein Kreis oder eine Gerade in der Ebene P. Ihr Bild unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ ist damit ein Kreis auf der Kugel K.
Durch die Netzprojektion ϑ werden also die nichtprojizierenden Geraden des $\bar{E}^3$ auf die Kegelschnitte in der Ebene P, die durch die beiden absoluten Kreispunkte dieser Ebene verlaufen, abgebildet. Die zwei absoluten Kreispunkte sind gleichzeitig die Schnittpunkte der Ebene P mit den beiden Brenngeraden (13) der von den projizierenden Geraden gebildeten linearen Kongruenz.

- Jede Ebene des $\bar{E}^3$ enthält genau eine projizierende Gerade (12). Die Menge der Geraden einer Ebene des $\bar{E}^3$ wird durch die Netzprojektion ϑ bzw. durch die verallgemeinerte stereographische Projektion δ auf das Bündel der Kreise durch einen festen Punkt in der Ebene P bzw. auf der

Kugel K abgebildet. Der Trägerpunkt des Bündels ist dabei das Bild der in der Ebene enthaltenen projizierenden Geraden.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften lassen sich nun Kurven und Flächen auf der Kugel K, die bestimmten geometrischen Vorgaben genügen, konstruieren. Um beispielsweise eine Folge von Punkten auf der Kugel K mit einer rationalen Bézierkurve zu interpolieren, betrachtet man die Urbilder dieser Punkte unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ. Diese Urbilder sind die den Punkten entsprechenden projizierenden Geraden (12). Anschließend wird eine rationale Bézierkurve im $\bar{E}^3$ konstruiert, die alle diese projizierenden Geraden trifft. Die gesuchte interpolierende Bézierkurve auf der Kugel ergibt sich dann als Bild der Kurve im $\bar{E}^3$ (siehe [5]).
Es stellt sich heraus, daß das Interpolationsproblem auf der Kugel letztlich auf die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden kann: *Interpolation mit rationalen Kurven auf der Kugel ist ein lineares Problem.*
Natürlich läßt sich auch mit Hilfe der stereographischen Projektion σ ein Verfahren zur Interpolation mit rationalen Kurven auf der Kugel entwickeln. Der Vorteil der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ liegt jedoch darin, daß zur Interpolation derselben Anzahl gegebener Punkte auf der Kugel ein geringerer Polynomgrad erforderlich ist, als dies bei der stereographischen Projektion der Fall wäre.
Die einfachsten rationalen Bézierflächen auf der Kugel besitzen den Polynomgrad (2,2). Im *Computer Aided Geometric Design* wurde von verschiedenen Autoren versucht, ein einfaches Kriterium dafür zu finden, daß ein solches biquadratisches Bézierflächenstück einen Teil einer Quadrik beschreibt ([3] [8] [9] u.a.). In [5] gab R. Dietz dafür eine einfache Bedingung an:
Sei $\mathbf{y}(u, v)$ ein biquadratisches Bézierflächenstück auf der Kugel. Es wird von den vier Kreisen $\mathbf{y}(0, v)$, $\mathbf{y}(u, 0)$, $\mathbf{y}(1, v)$ und $\mathbf{y}(u, 1)$ begrenzt. Die jeweils benachbarten Kreise schneiden sich in dem entsprechenden Eckpunkt $\mathbf{p}_i$ des biquadratischen Bézierflächenstücks und in einem weiteren Schnittpunkt $\mathbf{q}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ (siehe Abbildung 2a). Dann gilt:

a) Schema der Randkurven b) Projektion des Flächenstückes

Abbildung 2: Ein biquadratisches Bézierflächenstück auf der Kugel.

SATZ 7. *Falls das biquadratische Bézierflächenstück* $\mathbf{y}(u,v)$ *einen Teil der Kugel beschreibt, dann liegen die vier Punkte* $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{p}_3$ *und* $\mathbf{q}_4$ *auf einem Kreis.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus den Eigenschaften der verallgemeinerten stereographischen Projektion, wenn man beachtet, daß sich nach Satz 1 jedes biquadratische Bézierflächenstück auf der Kugel als Bild eines bilinearen Bézierflächenstücks im $\bar{E}^3$ unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ erzeugen läßt. Es gilt sogar die Umkehrung von Satz 7: Falls vier Kreise auf der Kugel die Bedingung des Satzes erfüllen, dann existiert auch ein biquadratisches Bézierflächenstück auf der Kugel, dessen Ecken die Punkte $\mathbf{p}_i$ und dessen Randkurven Segmente der gegebenen Kreise sind. Abbildung 2b zeigt ein solches Bézierflächenstück auf der Kugel. (Diese Abbildung wurde freundlicherweise von Herrn R. Dietz zur Verfügung gestellt.)
Aus Symmetriegründen ist offensichtlich, daß unter den Voraussetzungen von Satz 7 auch die vier Punkte $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_3$ und $\mathbf{p}_4$ auf einem Kreis liegen müssen. (Mit $\mathbf{y}(u,v)$ liegt auch das biquadratische Bézierflächenstück $\mathbf{y}^*(u,v) := \mathbf{y}(1-u,v)$ auf der Kugel und muß die Bedingung des Satzes erfüllen.) Diese Aussage ist bereits als

SATZ VON MIQUEL bekannt: *Lassen sich acht Punkte so den Eckpunkten eines Würfels zuordnen, daß es fünfmal vorkommt, daß den Eckpunkten einer Seitenebene des Würfels vier konzyklische Punkte entsprechen, so ist dies auch bei den Eckpunkten der sechsten Seitenebene der Fall.*

Der Satz von Miquel gilt bereits in viel allgemeineren Geometrien (siehe [1]). Es ist überraschend, daß bei der Untersuchung rationaler Flächen auf Quadriken die Konfiguration dieses Satzes auftritt.

3 DIE VERALLGEMEINERTE STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION AUF DAS HYPERBOLISCHE PARABOLOID

Die Untersuchung rationaler Kurven und Flächen auf dem hyperbolischen Paraboloid H verläuft völlig analog zum vorhergehenden Kapitel. Wieder wird zunächst die Darstellungsformel (8) für rationale Kurven und Flächen auf dem hyperbolischen Paraboloid H als Abbildung aufgefaßt:

DEFINITION. *Die Abbildung* $\psi : \bar{E}^3 \to H : \mathbf{q} \mapsto \psi(\mathbf{q})$ *mit*

$$\psi(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_0\, q_3 \\ q_1\, q_3 \\ q_0\, q_2 \\ q_1\, q_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

heißt verallgemeinerte stereographische Projektion auf das hyperbolische Paraboloid.

Jede Lösung der diophantischen Gleichung (6) besitzt eine Darstellung der Form (8). Damit gilt eine zu Satz 1 analoge Aussage.
Die stereographische Projektion auf das hyperbolische Paraboloid ist wieder als Spezialfall in (15) enthalten:

SATZ 8. *Die Einschränkung der verallgemeinerten stereographischen Projektion* ψ *auf die Ebene* R *mit* $q_3 = q_0$ *ist die stereographische Projektion* $\tau : R \to H$ *mit dem Zentrum* $\mathbf{c} = (0\,0\,0\,1)^\top$.

BEWEIS. Die stereographische Projektion τ ordnet jedem Punkt $\mathbf{q} = (\, q_0\, q_1\, q_2\, q_0\,)^\top$ der Ebene R den von $\mathbf{c}$ verschiedenen Schnittpunkt $\tau(\mathbf{q})$ des hyperbolischen Paraboloids H mit der Geraden durch $\mathbf{c}$ und $\mathbf{q}$ zu. Dieser Punkt besitzt die Koordinaten

$$\tau(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_0^2 \\ q_0\, q_1 \\ q_0\, q_2 \\ q_1\, q_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Durch Vergleich von (15) und (16) folgt sofort die Behauptung. ■

Die stereographische Projektion auf das hyperbolische Paraboloid H bildet die Hyperbeln der Ebene R, die durch die beiden Fernpunkte $(\,0\,1\,0\,0\,)^\top$ und $(\,0\,0\,1\,0\,)^\top$ verlaufen (deren Asymptoten also parallel zur x- bzw. y-Achse sind), sowie die Geraden der Ebene R auf die Kegelschnitte auf dem hyperbolischen Paraboloid H ab. Die beiden Fernpunkte $(\,0\,1\,0\,0\,)^\top$ und $(\,0\,0\,1\,0\,)^\top$ spielen jetzt die Rolle, die die absoluten Kreispunkte der Ebene P im vorangegangenen Kapitel besaßen.

Abbildung 3: Die verallgemeinerte stereographische Projektion ψ
auf das hyperbolische Paraboloid.

Erneut wird die verallgemeinerte stereographische Projektion $\psi : \bar{E}^3 \to H$ als Zusammensetzung einer weiteren Abbildung $\alpha : \bar{E}^3 \to R$ mit der stereographischen Projektion $\tau : R \to H$ aufgefaßt:

SATZ 9. *Die verallgemeinerte stereographische Projektion ψ ist die Zusammensetzung der Abbil-*

dung $\alpha: \bar{E}^3 \to R: \mathbf{q} \mapsto \alpha(\mathbf{q})$

$$\alpha(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_0\, q_3 \\ q_1\, q_3 \\ q_0\, q_2 \\ q_0\, q_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

mit der stereographischen Projektion τ, *d.h. es gilt* $\psi = \tau \circ \alpha$ *(siehe Abbildung 3).*

Durch die Zerlegung $\psi = \tau \circ \alpha$ der verallgemeinerten stereographischen Projektion ist es nun wieder möglich, die geometrischen Eigenschaften von ψ auf die der Abbildung α zurückzuführen. Zunächst wird das Urbild eines Punktes $\mathbf{q} \in R$ unter der Abbildung α untersucht:

LEMMA 10. *Das Urbild des Punktes* $\mathbf{q} = (\, q_0\, q_1\, q_2\, q_0\,)^\top \in R$ *unter der Abbildung* α *ist die Gerade*

$$\lambda \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \tag{18}$$

Damit ist diese Gerade das Urbild des Punktes $\mathbf{h} \in H$ *mit* $\mathbf{q} = \tau^{-1}(\mathbf{h})$ *unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion* ψ.

Diese Geraden (18) werden im folgenden als *projizierende Geraden* der Abbildung α bezeichnet. Sie bilden eine zweiparametrige Geradenschar. Die Geraden dieser Schar (18) treffen die beiden Brenngeraden $(\,1\,\lambda\,0\,0\,)^\top$ und $(\,0\,0\,1\,\mu\,)^\top$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ (d.h. sie gehen durch die x-Achse und sind parallel zur yz-Ebene). Damit gilt:

SATZ 11. *Die projizierenden Geraden (18) bilden eine hyperbolische lineare Kongruenz (bzw. ein hyperbolisches Netz) von Geraden. Die Abbildung* α *ist eine Netzprojektion bezüglich dieses hyperbolischen Geradennetzes.*

Die folgende Übersicht faßt einige Eigenschaften der Netzprojektion α und die sich daraus ergebenden Eigenschaften der verallgemeinerten stereographischen Projektion ψ zusammen:

- Das Urbild einer Hyperbel mit achsenparallelen Asymptoten in der Ebene R unter der Netzprojektion α (und damit auch einer Hyperbel auf dem hyperbolischen Paraboloid H unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion ψ) ist ein einschaliges Hyperboloid im $\bar{E}^3$.
Das Urbild einer Geraden in der Ebene R unter der Netzprojektion α (und damit einer Parabel oder Geraden auf dem hyperbolischen Paraboloid H unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion ψ) ist ein (allgemeines) hyperbolisches Paraboloid im $\bar{E}^3$.

- Das Bild einer nichtprojizierenden Geraden im $\bar{E}^3$ unter der Netzprojektion α ist eine Hyperbel mit achsenparallelen Asymptoten oder eine Gerade in der Ebene R. Ihr Bild unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion δ ist damit ein Kegelschnitt auf dem hyperbolischen Paraboloid H.
Durch die Netzprojektion α werden also die nichtprojizierenden Geraden des $\bar{E}^3$ auf die Kegelschnitte in der Ebene R, die durch die beiden Punkte $(\,0\,1\,0\,0\,)^\top \in R$ und $(\,0\,0\,1\,0\,)^\top \in R$ verlaufen,

abgebildet. Diese zwei Punkte sind gleichzeitig die Schnittpunkte der Ebene R mit den beiden Brenngeraden der von den projizierenden Geraden (18) gebildeten linearen Kongruenz.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften lassen sich nun ebenfalls Kurven und Flächen auf dem hyperbolischen Paraboloid H, die bestimmten geometrischen Vorgaben genügen, konstruieren. So läßt sich beispielsweise die Interpolation mit rationalen Kurven auf dem hyperbolischen Paraboloid wie auch die Erzeugung biquadratischer Flächenstücke weitgehend analog zum vorangegangenen Kapitel behandeln. Ausführliche Konstruktionen von Kurven und Flächen auf der Kugel und dem hyperbolischen Paraboloid werden in [6] entwickelt.

SCHLUSSBEMERKUNG

Mit Hilfe geeigneter projektiver Abbildungen lassen sich die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Abschnitte auf beliebige nichtentartete Quadriken übertragen. Für entartete Quadriken, also Zylinder und Kegel, läßt sich ebenfalls eine Verallgemeinerung der stereographischen Projektion finden. Diese ist dann die Zusammensetzung einer Netzprojektion bezüglich einer parabolischen linearen Kongruenz mit der stereographischen Projektion.
Die verallgemeinerte stereographische Projektion hat sich als ein sehr effektives Werkzeug zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken erwiesen. Das Anliegen der Arbeit war es, zu zeigen, wieviel Geometrie hinter den zunächst rein algebraisch begründeten Darstellungsformeln (7) und (8) steckt. Die Anwendung geometrischer Methoden zur Untersuchung der beiden Darstellungsformeln gestattet die Formulierung sehr anschaulicher und bequem handhabbarer Konstruktionen für rationale Kurven und Flächen auf Quadriken.

LITERATUR

[1] BENZ, W.: *Vorlesungen über Geometrie der Algebren.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973.

[2] BEREIS, R., und BRAUNER, H.: *Schraubung und Netzprojektion.* Elemente der Mathematik 12 (1957), 33-41.

[3] BOEHM, W., und HANSFORD, D.: *Bézier patches on Quadrics.* in FARIN, G. (Hrsg.): *NURBS for Curve and Surface Design.* SIAM, Philadelphia 1991, 1-14.

[4] DICKSON, L.E.: *History of the Theory of Numbers, Vol. II.* Chelsea, New York 1952, 265-269.

[5] DIETZ, R., HOSCHEK, J., und JÜTTLER, B.: *An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics.* Computer Aided Geometric Design 10 (1993).

[6] DIETZ, R., HOSCHEK, J., und JÜTTLER, B.: *Rational Patches on Quadric Surfaces.* eingereicht bei Computer Aided Design.

[7] ECKHART, L.: *Konstruktive Abbildungsverfahren.* Verlag von Julius Springer, Wien 1926.

[8] FINK, U.: *Biquadratische Bézier-Flächenstücke auf Quadriken.* Dissertation, Universität Stuttgart 1992.

[9] GEISE, G., und LANGBECKER, U.: *Finite quadric segments with four conic boundary curves.* Computer Aided Geometric Design 7 (1990), 141-150.

[10] GIERING, O.: *Vorlesungen über höhere Geometrie.* Vieweg, Braunschweig 1982.

[11] HOSCHEK, J., und LASSER, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung.* Teubner, Stuttgart (2. Aufl.) 1992.

[12] HOSCHEK, J., und SEEMANN, G.: *Spherical Splines.* Mathematical Modelling and Numerical Analysis 26 (1992), 1-22.

[13] HOSCHEK, J.: *Bézier Curves and Surface Patches on Quadrics.* in LYCHE, T. und SCHUMAKER, L.L. (Hrsg.): *Mathematical methods in CAGD and Image Processing.* Academic Press, Boston 1992, 1-4.

[14] LEBESGUE, V.A.: *Sur une identité qui conduit à toutes les solutions de l'equation* $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris 66 (1868), 396-398.

[15] TUSCHEL, L.: *Über die Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwendung.* Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 120 (1911), 233-254.

[16] WARREN, J., und LODHA, S.: *A Bézier Representation for Quadric Surface Patches.* Computer-aided Design 22 (1990), 574-579.

[17] WUNDERLICH, W.: *Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen.* Monatshefte für Mathematik und Physik 44 (1936), 249-279.

[18] ZINDLER, K.: *Liniengeometrie mit Anwendungen, Bd. I.* G.J. Göschen, Leipzig 1902.

Bert Jüttler
Technische Hochschule Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstr.7
D-W-6100 Darmstadt
Germany