

# ZUR VERALLGEMEINERTEN STEREOGRAPHISCHEN PROJEKTION

Roland Dietz\*, Gerhard Geise\*\* und Bert Jüttler\*

\* *Technische Hochschule Darmstadt, Fachbereich Mathematik, Arbeitsgruppe Differentialgeometrie und Kinematik, D-64289 Darmstadt, Schloßgartenstraße 7, Deutschland.*

\*\* *Technische Universität Dresden, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, Institut für Geometrie, D-01062 Dresden, Deutschland.*

**Herrn Professor Dr. H. Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet.**

*Received* November 1994

*AMS Subject Classification:* 51M30, 51N15, 53A05.

*Keywords:* Rational curves and surfaces, quadric surfaces, line geometry, net projection, generalized stereographic projection.

**Abstract:** The paper presents a generalization of the stereographic projection on the unit sphere. This generalization is introduced as the composition of a net projection with a stereographic projection. Additionally, a line-geometrical approach is outlined. We discuss the image of a linear complex of lines which contains the focal lines of the net. This image turns out to be a “generalized bundle of circles”. Finally we prove a conjecture of U. Fink on biquadratic rational parametric representations of quadric surfaces.

## Einleitung

Zur mathematischen Beschreibung von Kurven und Flächen werden im *Computer Aided Geometric Design* meist polynomiale oder rationale Parameterdarstellungen verwendet [13]. Ein wesentlicher Vorteil der rationalen Darstellungen besteht dabei in der Tatsache, daß sie Kegelschnitte und Quadriken, die traditionell für viele technische Anwendungen von Interesse sind, exakt beschreiben können. In den letzten Jahren wurden verschiedene Methoden zur Konstruktion rationaler Parameterdarstellungen für Segmente von Quadriken entwickelt (siehe [3,9,11] und die Verweise in [5]). Die meisten dieser Methoden verwenden dabei die stereographische Projektion. Diese Abbildung besitzt jedoch unter anderem den Nachteil, daß sich nicht jede biquadratische rationale Parameterdarstellung

einer Quadrik als Bild einer bilinearen Fläche erzeugen läßt. (Ein Gegenbeispiel wird u.a. in [9] angegeben.) Weiterhin ist es nicht möglich, jede sphärische rationale Kurve der Ordnung  $2n$  als Bild einer Kurve der Ordnung  $n$  zu konstruieren.

Die in [5] eingeführte *verallgemeinerte stereographische Projektion* vermeidet diese Nachteile. Im weiteren werden am Beispiel der Einheitskugel einige geometrische Aspekte des Verfahrens untersucht.

Nachdem im ersten Abschnitt die durch ein Drehnetz vermittelte Netzprojektion kurz eingeführt wurde, definiert der folgende Abschnitt die verallgemeinerte stereographische Projektion als Zusammensetzung von Netzprojektion und stereographischer Projektion auf die Kugel. Zusätzlich dazu wird im anschließenden dritten Abschnitt ein liniengeometrischer Zugang vorgestellt. Im Abschnitt 4 wird das Urbild der Kreise einer Büschelsatz-Konfiguration sowie das Bild eines Geradenkomplexes bei einer Netzprojektion betrachtet. Der abschließende fünfte Abschnitt ist den Eigenschaften von biquadratischen rationalen Parameterdarstellungen der Kugel gewidmet. Dabei gelingt es, eine Vermutung von U. Fink (siehe [9, S. 102]) zu beweisen.

## 1. Projektion mittels eines Drehnetzes (Netzprojektion)

Den folgenden Überlegungen liegt der dreidimensionale reelle euklidische Raum  $E^3$  zugrunde, der durch Hinzunahme von Fernpunkten projektiv abgeschlossen sei. Gelegentlich wird auch die komplexe Erweiterung dieses Raumes herangezogen. Die Punkte des  $\bar{E}^3$  werden mit Hilfe homogener Koordinatenvektoren  $\mathbf{p} = (p_0 p_1 p_2 p_3)^\top$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit

$$1 : x : y : z = p_0 : p_1 : p_2 : p_3 \quad (1)$$

beschrieben. Die Fernebene wird dabei von den Punkten mit  $p_0 = 0$  gebildet. Die Geraden des  $\bar{E}^3$  werden durch ihre homogenen Plücker-Koordinaten  $\hat{\mathbf{g}} = (g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6)^\top$ ,  $\hat{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^6 \setminus \{\mathbf{0}\}$  dargestellt, siehe beispielsweise [12, S. 224f.]. Diese Koordinaten genügen der Plückerbedingung

$$g_1 g_4 + g_2 g_5 + g_3 g_6 = 0. \quad (2)$$

Die Menge der Geraden, deren Plücker-Koordinaten den beiden Gleichungen

$$g_4 = \varrho g_1 \quad \text{und} \quad g_5 = \varrho g_2 \quad (3)$$

genügen, bildet ein Drehnetz zum Parameter  $\varrho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{m} = (1 0 0 0)^\top$  und der Mittelebene  $x_3 = 0$ . Bei diesem Drehnetz handelt es sich für  $\varrho \notin \{0, \infty\}$  um eine elliptische lineare Geradenkongruenz mit zwei konjugiert-hochimaginären Brenngeraden, vgl. [12, S. 231f.]. Es besteht aus den Bahntangenten der Punkte der Mittelebene  $x_3 = 0$  bei einer Schraubung mit dem Parameter  $-\varrho$  um die  $z$ -Achse. Für  $\varrho > 0$  ergibt sich ein Links-, für

$\varrho < 0$  dagegen ein Rechts-Drehnetz. Im Fall  $\varrho = 0$  entartet die Kongruenz zum Geradenbündel durch den Ursprung und dem Feld der Geraden der Mittelebene  $x_3 = 0$ . Für  $\varrho = \infty$  erhält man das Bündel aller zur  $z$ -Achse parallelen Geraden und das Feld der Geraden der Fernebene.

Durch jeden Punkt  $\mathbf{p} = (p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3)^\top \in \bar{E}^3$  verläuft genau eine Gerade  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$  des Drehnetzes (3). Sei  $\mathbf{f}_{\mathbf{p}} = (0 \ f_1 \ f_2 \ f_3)^\top$  der Fernpunkt dieser Geraden. Die Plücker-Koordinaten der Netzgeraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \vee \mathbf{f}_{\mathbf{p}}$  lauten dann

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} = (p_0 f_1 \quad p_0 f_2 \quad p_0 f_3 \quad p_2 f_3 - p_3 f_2 \quad p_3 f_1 - p_1 f_3 \quad p_1 f_2 - p_2 f_1)^\top. \quad (4)$$

Aus den beiden Netzgleichungen (3) erhält man nun den Fernpunkt

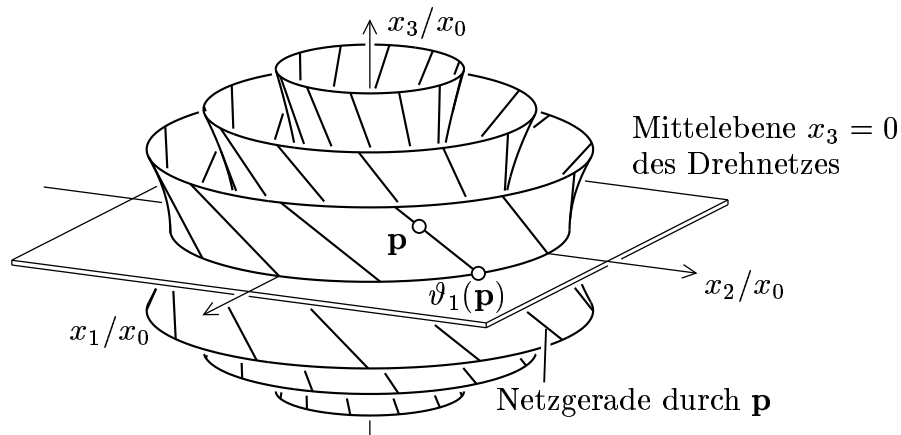
$$\mathbf{f}_{\mathbf{p}} = (0 \quad p_1 p_3 + \varrho p_0 p_2 \quad p_2 p_3 - \varrho p_0 p_1 \quad p_3^2 + \varrho^2 p_0^2)^\top \quad (5)$$

der Netzgeraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$ . Für den Schnittpunkt  $\vartheta_{\varrho}(\mathbf{p})$  dieser Netzgeraden mit der Mittelebene  $x_3 = 0$  ergibt sich damit unmittelbar

$$\vartheta_{\varrho}(\mathbf{p}) = \frac{1}{p_0} [(p_3^2 + \varrho^2 p_0^2) \mathbf{p} - p_3 \mathbf{f}_{\mathbf{p}}] = \begin{pmatrix} \varrho^2 p_0^2 + p_3^2 \\ \varrho^2 p_0 p_1 - \varrho p_2 p_3 \\ \varrho^2 p_0 p_2 + \varrho p_1 p_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Die Abbildung  $\vartheta_{\varrho} : \mathbf{p} \mapsto \vartheta_{\varrho}(\mathbf{p})$ , die jedem Punkt des  $\bar{E}^3$  den Schnittpunkt der durch ihn verlaufenden Netzgeraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$  mit der Mittelebene  $x_3 = 0$  zuordnet, wird als *Netzprojektion* bezüglich des Drehnetzes (3) zum Parameter  $\varrho$  bezeichnet ( $\varrho \notin \{0, \infty\}$ ). Sie entartet für  $\varrho = \infty$  in eine senkrechte Parallelprojektion auf die Mittelebene, für  $\varrho = 0$  dagegen werden alle Punkte auf den Ursprung des Koordinatensystems abgebildet.

Als Beispiel zeigt Abbildung 1 ein Drehnetz zum Parameter  $\varrho = 1$  und die dadurch vermittelte Netzprojektion  $\vartheta_1$ . Weiterhin sind drei der im Netz enthaltenen Drehhyperboloide dargestellt.



**Abbildung 1.** Netzprojektion  $\vartheta_1$ .

Die Netzprojektion wurde 1911 von L. Tuschel als die durch eine Geradenkongruenz vermittelte Projektion eingeführt [16]. Einen zweiten Zugang fand W. Wunderlich [17]: Die Netzprojektion läßt sich als eine Parallelprojektion bezüglich des Clifford-Parallelismus im elliptischen Raum auffassen. Einige Eigenschaften der Netzprojektion  $\vartheta_\rho$  sollen hier kurz zusammengefaßt werden, vgl. [16,8]:

- Als Bild einer Geraden, die nicht in der linearen Kongruenz (3) enthalten ist, entsteht ein Kreis oder eine Gerade in der Mittelebene  $x_3 = 0$ . (In [8,16] wurde als Bild einer Geraden ein in der Bildebene *befestigter* Kreis eingeführt, indem auf dem Kreis noch der Schnittpunkt der Bildebene mit der Geraden ausgezeichnet wurde. Im Unterschied dazu wird hier nur der Kreis als Bild der Geraden betrachtet.)
- Als Urbild eines festen Kreises oder einer festen Geraden  $k$  in der Mittelebene  $x_3 = 0$  erhält man eine Ringquadrik im  $\bar{E}^3$ . Die Geraden des zum Netz konjugierten Regulus dieser Quadrik werden auf den Kreis bzw. auf die Gerade  $k$  abgebildet.
- Jede Ebene des  $\bar{E}^3$  enthält genau eine Netzgerade. Das Feld der Geraden einer Ebene wird auf ein Kreisbündel in der Mittelebene abgebildet, dabei ist der Trägerpunkt des Bündels das Bild der in der Ebene enthaltenen Netzgeraden.

Die Netzprojektion  $\vartheta_\rho$  wurde hier zunächst als eine Abbildung der Punkte des  $\bar{E}^3$  auf die der Mittelebene  $x_3 = 0$  eingeführt. Gleichzeitig kann sie als Abbildung der Geraden des  $\bar{E}^3$  auf die (evtl. zu Punkten oder Geraden entarteten) Kreise in der Mittelebene aufgefaßt werden.

Zwei Netzprojektionen (6) zu verschiedenen Parametern  $\rho_1, \rho_2 \notin \{0, \infty\}$  lassen sich durch eine geeignete Streckung ineinander überführen, da sich die entsprechenden Drehnetze (3) durch eine solche Streckung aufeinander abbilden lassen. Darüber hinaus ist es sogar möglich, jede Netzprojektion bezüglich eines Drehnetzes als Zusammensetzung von  $\vartheta_1$  mit geeigneten affinen Abbildungen darzustellen.

## 2. Die verallgemeinerte stereographische Projektion

Die Menge aller Punkte  $\mathbf{q} \in \bar{E}^3$ , deren homogene Koordinaten der quadratischen Gleichung

$$q_0^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (7)$$

genügen, bildet die Einheitskugel des  $\bar{E}^3$ . Im *Computer Aided Geometric Design* wurden von verschiedenen Autoren Verfahren zur Konstruktion rationaler Parameterdarstellungen für die Kugel und für andere Quadriken entwickelt ([3,9,11] u.a.). Ein grundlegendes Werkzeug dabei ist die Verwendung der stereographischen Projektion. (Der Einfachheit halber soll im weiteren stets die Abbildung *auf* die Sphäre als stereographische Projektion bezeichnet werden,

obwohl es sich dabei streng genommen um die Umkehrung dieser Projektion handelt.)

Die stereographische Projektion mit dem Zentrum  $\mathbf{n} = (1 \ 0 \ 0 \ 1)^\top$  (dem „Nordpol“ der Kugel) von der Mittelebene  $p_3 = 0$  auf die Kugel (7) wird in homogenen Koordinaten durch die Abbildungsvorschrift  $\sigma : \mathbf{r} \mapsto \sigma(\mathbf{r})$  mit  $\mathbf{r} = (r_0 \ r_1 \ r_2 \ 0)^\top$  und

$$\sigma(\mathbf{r}) = 2r_0 \mathbf{r} + (-r_0^2 + r_1^2 + r_2^2) \mathbf{n} = \begin{pmatrix} r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 \\ 2r_0r_1 \\ 2r_0r_2 \\ -r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

beschrieben, vgl. [12, S. 372ff.]. Jeder eigentliche Punkt  $\mathbf{r}$  der Ebene  $x_3 = 0$  wird dabei auf den von  $\mathbf{n}$  verschiedenen Schnittpunkt der Geraden  $\mathbf{n} \vee \mathbf{r}$  mit der Einheitskugel (7) abgebildet. Die (reellen) uneigentlichen Punkte erhalten den „Nordpol“  $\mathbf{n}$  als gemeinsames Bild.

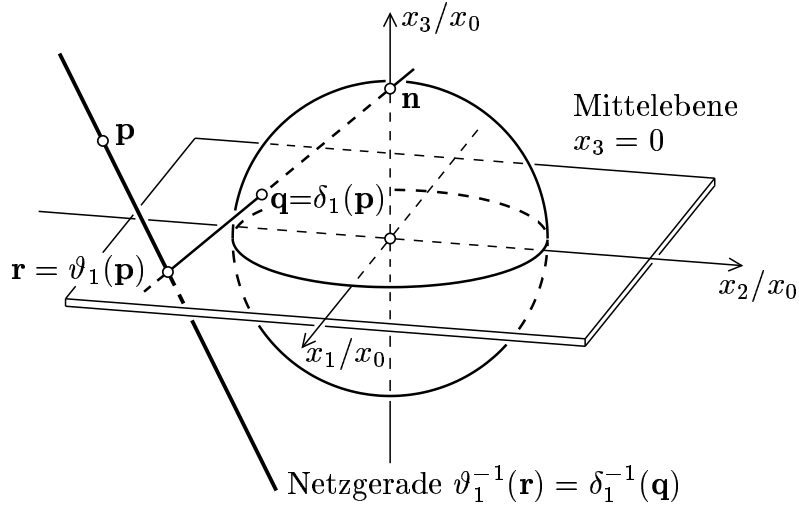
Setzt man die Netzprojektion  $\vartheta_\varrho$  zum Parameter  $\varrho \notin \{0, \infty\}$  (vgl. (6)) mit der stereographischen Projektion (8) zusammen, so entsteht eine Abbildung  $\delta_\varrho = \sigma \circ \vartheta_\varrho$  der Punkte des  $\bar{\mathbb{E}}^3$  auf die Einheitskugel (7). Nach Einsetzen von (6) in (8) (und Unterdrücken des sich abspaltenden Faktors  $\varrho^2 p_0^2 + p_3^2$ ) erhält man für diese Abbildung in homogenen Koordinaten die Darstellung

$$\delta_\varrho(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varrho^2(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2) + p_3^2 \\ 2\varrho^2 p_0 p_1 - 2\varrho p_2 p_3 \\ 2\varrho^2 p_0 p_2 + 2\varrho p_1 p_3 \\ \varrho^2(-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2) - p_3^2 \end{pmatrix} =: \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Überraschenderweise ergibt sich als Zusammensetzung zweier quadratischer Abbildungen also erneut eine (in den Koordinaten des Punktes  $\mathbf{p}$ ) quadratische Abbildung. Sie wird im weiteren als die *verallgemeinerte stereographische Projektion*  $\delta_\varrho$  zum Parameter  $\varrho \notin \{0, \infty\}$  bezeichnet. Für  $\varrho = \infty$  entartet sie in die „gewöhnliche“ stereographische Projektion, wobei die Punkte des  $\bar{\mathbb{E}}^3$  zunächst parallel zur  $z$ -Achse auf die Ebene  $p_3 = 0$  projiziert werden. Im Fall  $\varrho = 0$  dagegen werden alle Punkte auf den „Südpol“ der Einheitskugel abgebildet.

Als Beispiel ist in Abbildung 2 die verallgemeinerte stereographische Projektion  $\delta_\varrho$  zum Parameter  $\varrho = 1$  dargestellt. Der Punkt  $\mathbf{p} \in \bar{\mathbb{E}}^3$  wird zunächst durch die Netzprojektion  $\vartheta_1$  auf den Punkt  $\mathbf{r}$  in der Mittelebene  $x_3 = 0$  abgebildet. Der Punkt  $\delta_1(\mathbf{p})$  ist dann das Bild von  $\mathbf{r}$  bei der stereographischen Projektion  $\sigma$ . Ähnlich wie bei der Netzprojektion  $\vartheta_\varrho$  kann die verallgemeinerte stereographische Projektion  $\delta_\varrho$  sowohl als eine Abbildung der Punkte des  $\bar{\mathbb{E}}^3$  auf die der Sphäre, aber auch als eine Abbildung der Geraden des  $\bar{\mathbb{E}}^3$  auf die (evtl. zu Punkten entarteten) sphärischen Kreise aufgefaßt werden.

Die verallgemeinerte stereographische Projektion wurde in [5] eingeführt. Dem ursprünglichen Zugang liegt eine Darstellungsformel für pythagoräische



**Abbildung 2.** Verallgemeinerte stereographische Projektion  $\delta_1$ .

Quadrupel in Polynomringen zugrunde, die (für ganzzahlige Quadrupel) bereits 1868 von V. A. Lebesgue gefunden wurde [4 (S. 265),15]. Andererseits ist (mit anderen Bezeichnungen) die grundlegende Beziehung  $q_0^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$  zwischen den Komponenten des Vektors  $\delta_1(\mathbf{p})$  (siehe (9)) schon 1819 von C. F. Gauß notiert worden [10]. Auch aus der bekannten Darstellung eigentlich orthogonaler  $3 \times 3$ -Matrizen nach L. Euler aus dem Jahre 1770 kann die Relation zwischen den  $q_i$  abgelesen werden, siehe beispielsweise [2, S. 23]. Aus ihr erhält man gleichzeitig neben  $\delta_1$  noch zwei weitere verallgemeinerte stereographische Projektionen derart, daß die drei Bildpunkte eines Punktes  $\mathbf{p} \in \bar{\mathbb{E}}^3$  paarweise orthogonale Ortsvektoren besitzen.

Die verallgemeinerte stereographische Projektion ist im allgemeinen keine idempotente Abbildung, also keine wirkliche Projektion. Bei der von ihr induzierten Selbstabbildung der Kugel wird die gesamte Fläche auf die südliche Hemisphäre (einschließlich des Äquators) abgebildet. Der Äquator bleibt punktweise fest. Breitenkreise gehen in Breitenkreise über. Die Punkte des Äquators sind anziehende Fixpunkte, der Südpol dagegen ist ein abstoßender Fixpunkt.

Zur Konstruktion der verallgemeinerten stereographischen Projektion  $\delta_\rho = \sigma \circ \vartheta_\rho$  kann an Stelle des Drehnetzes (3) eine beliebige elliptische lineare Kongruenz mit der Mittelebene  $x_3 = 0$  verwendet werden, deren Brenngeraden diese Ebene in den beiden absoluten Kreispunkten schneiden.

Aufgrund der Kreistreue der stereographischen Projektion lassen sich viele Eigenschaften der Netzprojektion  $\vartheta_\rho$  unmittelbar auf die verallgemeinerte stereographische Projektion übertragen, insbesondere gelten die drei am Ende des vorigen Abschnittes formulierten Aussagen entsprechend (vgl. [5,14]). Zusätzlich dazu wurde in [5] mit Hilfe algebraischer Methoden gezeigt, daß sich jede rationale Kurve der Ordnung  $2n$  auf der Kugel als Bild einer rationalen Kurve der Ordnung  $n$  im  $\bar{\mathbb{E}}^3$  unter der verallgemeinerten stereographischen

Projektion konstruieren läßt. Eine analoge Aussage gilt auch für bivariate rationale Parameterdarstellungen der Kugel.

### 3. Ein liniengeometrischer Zugang

In diesem Abschnitt wird ein weiterer Zugang zur verallgemeinerten stereographischen Projektion  $\delta_\varrho$  ( $\varrho \notin \{0, \infty\}$ ) vorgestellt. Durch die vier einfach singulären Korrelationen  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  mit

$$\gamma_1(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ -p_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\varrho p_1 \\ \varrho p_0 \\ p_3 \\ \varrho p_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\varrho p_2 \\ -p_3 \\ \varrho p_0 \\ \varrho p_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -p_3 \\ -\varrho p_2 \\ \varrho p_1 \\ -p_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

werden jedem Punkt  $\mathbf{p} = (p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3)^\top$  des  $\bar{E}^3$  die vier Ebenen  $\gamma_i(\mathbf{p})^\top \mathbf{x} = 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) zugeordnet. Die vier Vektoren  $\gamma_1(\mathbf{p}), \dots, \gamma_4(\mathbf{p})$  sind die *homogenen Koordinatenvektoren* dieser vier Ebenen. Für die vier Grundpunkte des Koordinatensystems ist je eine der Abbildungen  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  nicht definiert. Die erste singuläre Korrelation  $\gamma_1$  läßt sich aus einer senkrechten Parallelprojektion auf die Ebene  $x_0 + x_3 = 0$  und der Polarität an der Einheitskugel (7) zusammensetzen. Ähnliche Deutungen kann man auch für die anderen drei Abbildungen finden.

Während die beiden Ebenen  $\gamma_1(\mathbf{p})$  und  $\gamma_4(\mathbf{p})$  jeweils durch den „Südpol“  $\mathbf{s} = (1 \ 0 \ 0 \ -1)^\top$  der Einheitskugel (7) verlaufen, enthalten die Ebenen  $\gamma_2(\mathbf{p})$  und  $\gamma_3(\mathbf{p})$  dagegen den „Nordpol“  $\mathbf{n} = (1 \ 0 \ 0 \ 1)^\top$  dieser Kugel. Für die vier Bildebenen eines Punktes  $\mathbf{p}$  gilt weiterhin:

**Lemma 1.** *Die vier Ebenen  $\gamma_1(\mathbf{p}), \dots, \gamma_4(\mathbf{p})$  schneiden sich im Punkt  $\delta_\varrho(\mathbf{p})$ .*

**Beweis.** Wie man leicht nachrechnet, genügt  $\delta_\varrho(\mathbf{p})$  den vier Gleichungen

$$\gamma_1(\mathbf{p})^\top \delta_\varrho(\mathbf{p}) = \gamma_2(\mathbf{p})^\top \delta_\varrho(\mathbf{p}) = \gamma_3(\mathbf{p})^\top \delta_\varrho(\mathbf{p}) = \gamma_4(\mathbf{p})^\top \delta_\varrho(\mathbf{p}) = 0. \quad \square$$

Die vier singulären Korrelationen  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  können jeweils noch mit der Polarität an der Kugel (7) zusammengesetzt werden. Man erhält dann vier einfach singuläre Kollineationen, die jedem Punkt  $\mathbf{p}$  des  $\bar{E}^3$  je zwei Punkte in den beiden Tangentialebenen  $x_0 + x_3 = 0$  und  $x_0 - x_3 = 0$  der Kugel (7) zuordnen. Die vier Bildpunkte von  $\mathbf{p}$  liegen in der Ebene, die die Kugel im Punkt  $\delta_\varrho(\mathbf{p})$  berührt.

Mit dem Lemma folgt unmittelbar, daß durch die beiden singulären Korrelationen  $\gamma_1$  und  $\gamma_4$  die Punkte der durch den Punkt  $\mathbf{p}$  verlaufenden Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$  des Drehnetzes (3) auf die Ebenen des Büschels durch die Gerade  $\mathbf{s} \vee \delta_\varrho(\mathbf{p}) = \gamma_1(\mathbf{p}) \wedge \gamma_4(\mathbf{p})$  abgebildet werden. Gleichzeitig erhält man als Bilder dieser Punkte bei den Abbildungen  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  die Ebenen des Büschels durch die Gerade  $\mathbf{n} \vee \delta_\varrho(\mathbf{p}) = \gamma_2(\mathbf{p}) \wedge \gamma_3(\mathbf{p})$ .

Die Plücker-Koordinaten der Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$  des Drehnetzes (3) durch den Punkt  $\mathbf{p}$  sowie der beiden Geraden  $\mathbf{s} \vee \delta_{\varrho}(\mathbf{p}) = \gamma_1(\mathbf{p}) \wedge \gamma_4(\mathbf{p})$  und  $\mathbf{n} \vee \delta_{\varrho}(\mathbf{p}) = \gamma_2(\mathbf{p}) \wedge \gamma_3(\mathbf{p})$  lauten

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} &= (g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5 \quad g_6)^\top, \\ \gamma_1(\mathbf{p}) \wedge \gamma_4(\mathbf{p}) &= (-\varrho g_2 \quad g_4 \quad -\varrho g_6 \quad g_4 \quad \varrho g_2 \quad 0)^\top := S_{\varrho}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}), \\ \gamma_2(\mathbf{p}) \wedge \gamma_3(\mathbf{p}) &= (\varrho g_2 \quad -\varrho g_1 \quad g_3 \quad \varrho g_1 \quad \varrho g_2 \quad 0)^\top := N_{\varrho}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} g_1 &= p_1 p_3 + \varrho p_0 p_2 & , & & g_2 &= p_2 p_3 - \varrho p_0 p_1, \\ g_3 &= p_3^2 + \varrho^2 p_0^2 & , & & g_4 &= \varrho^2 p_0 p_2 + \varrho p_1 p_3, \\ g_5 &= \varrho p_2 p_3 - \varrho^2 p_0 p_1 & \text{und} & & g_6 &= -\varrho(p_1^2 + p_2^2), \end{aligned} \quad (11)$$

vgl. (4) und (5). Die beiden Abbildungen  $S_{\varrho}$  und  $N_{\varrho}$  ordnen der Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$  des Drehnetzes (3) je eine Gerade des Bündels durch die Punkte  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{n}$  zu. Dabei schneiden sich die beiden Bilder dieser Netzgeraden im Punkt  $\delta_{\varrho}(\mathbf{p})$  der Kugel (7). Man erhält somit eine weitere Deutung der verallgemeinerten stereographischen Projektion  $\delta_{\varrho}$ :

**Satz 2.** *Durch die beiden Abbildungen  $S_{\varrho}$  und  $N_{\varrho}$  wird der Netzgeraden durch den Punkt  $\mathbf{p}$  des  $\bar{\mathbb{E}}^3$  je eine Gerade durch die beiden Punkte  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{n}$  zugeordnet. Beide Geraden schneiden sich im Bild  $\delta_{\varrho}(\mathbf{p})$  des Punktes  $\mathbf{p} \in \bar{\mathbb{E}}^3$  bei der verallgemeinerten stereographischen Projektion. Durch die verallgemeinerte stereographische Projektion wird die Einheitskugel (7) punktweise als Schnitt der Geraden zweier projektiv aufeinander bezogener Geradenbündel erzeugt.*

#### 4. Büschelsatz-Konfigurationen und ihre Urbilder

Gegeben seien vier Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{q},\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$  im  $\bar{\mathbb{E}}^3$ . Als Bilder dieser vier Geraden bei der Netzprojektion  $\vartheta_{\varrho}$  zum Parameter  $\varrho \notin \{0, \infty\}$  erhält man vier Kreise  $K_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \vartheta_{\varrho}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}), K_{\mathbf{q},\mathbf{r}} = \vartheta_{\varrho}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{q},\mathbf{r}}), K_{\mathbf{r},\mathbf{s}} = \vartheta_{\varrho}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}})$  und  $K_{\mathbf{p},\mathbf{s}} = \vartheta_{\varrho}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{s}})$  in der Mittelebene  $x_3 = 0$ . Diese Kreise können auch zu Geraden oder Punkten entarten.

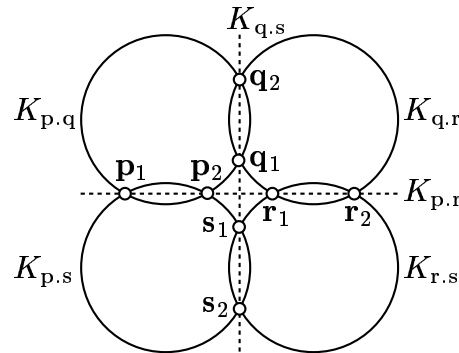


Abbildung 3. Büschelsatz-Konfiguration.

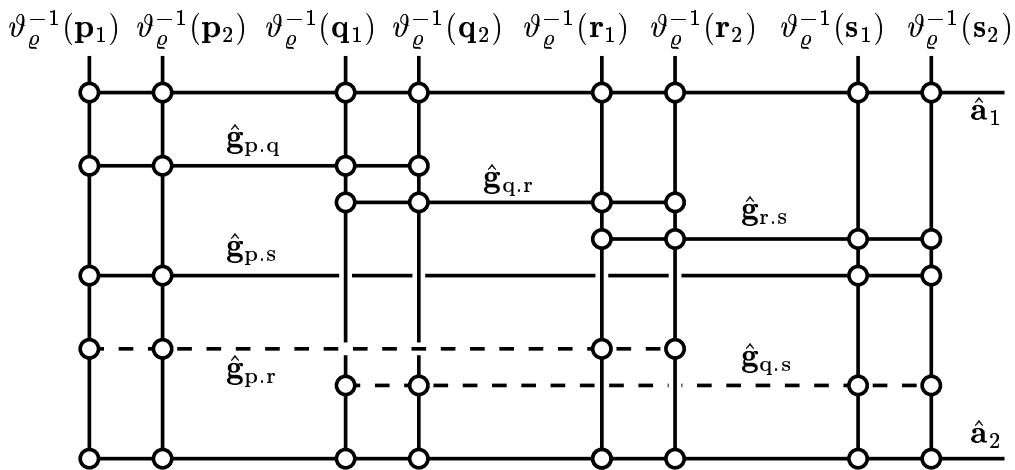


Mit  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  seien die (von den absoluten Kreispunkten der Ebene  $x_3 = 0$  verschiedenen) Schnittpunkte von je zwei dieser Kreise bezeichnet, siehe Abbildung 3. Dabei sind natürlich auch komplexe oder mehrfache Schnittpunkte möglich. Nach dem *Büschelsatz* (siehe [1, S. 133f.]) gilt, daß die vier Punkte  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  genau dann auf einem Kreis  $K_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$  liegen, wenn auch die vier Punkte  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  konzyklisch sind. Diese beiden Kreise können zu Geraden oder (im Fall komplexer Schnittpunkte) zu nullteiligen Kreisen entarten. Mit Hilfe der stereographischen Projektion  $\sigma$  läßt sich die Aussage des Büschelsatzes unmittelbar auf sphärische Kreiskonfigurationen übertragen. Falls die vier Kreise  $K_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, K_{\mathbf{q},\mathbf{r}}, K_{\mathbf{r},\mathbf{s}}, K_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$  die Voraussetzung des Büschelsatzes erfüllen (d.h., falls die vier Punkte  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  konzyklisch sind), dann liegen sie in einer *Büschelsatz-Konfiguration*. Für die vier sphärischen Kreise  $\sigma(K_{\mathbf{p},\mathbf{q}}), \sigma(K_{\mathbf{q},\mathbf{r}}), \sigma(K_{\mathbf{r},\mathbf{s}}), \sigma(K_{\mathbf{p},\mathbf{s}})$  gilt dann, daß sich ihre Trägerebenen in einem Punkt schneiden.

Im folgenden Satz wird ein Kriterium dafür angegeben, daß die Bilder der vier gegebenen Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{q},\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$  bei der Netzprojektion  $\vartheta_\rho$  bzw. bei der verallgemeinerten stereographischen Projektion  $\sigma_\rho$  in einer Büschelsatz-Konfiguration liegen:

**Satz 3.** *Die drei folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (1) *Die vier Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{q},\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$  im  $\bar{\mathbb{E}}^3$  sind zusammen mit den beiden konjugiert-hochimaginären Brenngeraden  $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$  des Drehnetzes (3) in einem linearen Geradenkomplex enthalten.*
- (2) *Die Bildkreise  $K_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, K_{\mathbf{q},\mathbf{r}}, K_{\mathbf{r},\mathbf{s}}, K_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$  der vier Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{q},\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$  bei der Netzprojektion  $\vartheta_\rho$  liegen in einer Büschelsatz-Konfiguration.*
- (3) *Die Trägerebenen der vier Bildkreise  $\sigma(K_{\mathbf{p},\mathbf{q}}), \sigma(K_{\mathbf{q},\mathbf{r}}), \sigma(K_{\mathbf{r},\mathbf{s}}), \sigma(K_{\mathbf{p},\mathbf{s}})$  der vier Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{q},\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p},\mathbf{s}}$  bei der verallgemeinerten stereographischen Projektion  $\delta_\rho$  schneiden sich in einem Punkt.*



**Abbildung 4.** Geradenkonfiguration im  $\bar{\mathbb{E}}^3$  (Schema).

**Beweis.** In Abbildung 4 ist schematisch die Geradenkonfiguration im  $\bar{E}^3$  dargestellt. Mit  $\vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{p}_1), \vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{p}_2), \dots, \vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{s}_2)$  sind dabei die (evtl. komplexen) Netzgeraden durch die acht Schnittpunkte  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{s}_2$  der vier Kreise  $K_{p,q}, K_{q,r}, K_{r,s}, K_{p,s}$  in der Mittelebene  $x_3 = 0$  bezeichnet, vgl. Abbildung 3.

Im Standardmodell der projektiven Liniengeometrie (siehe [12, S. 323ff.]) entspricht jeder Geraden des  $\bar{E}^3$  ein Punkt der sog. Plücker-Quadrik (2) des fünfdimensionalen Raumes  $P^5$ . Die homogenen Koordinaten dieses Punktes sind dabei gerade die Plückerkoordinaten der betrachteten Geraden. Zwei Geraden des  $\bar{E}^3$  schneiden sich, wenn ihre Bildpunkte polar bezüglich der Plücker-Quadrik sind. Mit  $\hat{\mathbf{h}}^*$  wird im weiteren die Polare des der Geraden  $\hat{\mathbf{h}}$  entsprechenden Punktes im  $P^5$  bezüglich der Plücker-Quadrik (2) bezeichnet, während  $\wedge$  für den Schnitt von  $k$ -Ebenen des  $P^5$  steht.

Die erste Aussage des Satzes gilt genau dann, wenn die den sechs Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{p,q}, \hat{\mathbf{g}}_{q,r}, \hat{\mathbf{g}}_{r,s}, \hat{\mathbf{g}}_{p,s}, \hat{\mathbf{a}}_1$  und  $\hat{\mathbf{a}}_2$  entsprechenden Punkte in einer 4-Ebene des  $P^5$  enthalten sind. Ihre Polaren  $\hat{\mathbf{g}}_{p,q}^*, \hat{\mathbf{g}}_{q,r}^*, \hat{\mathbf{g}}_{r,s}^*, \hat{\mathbf{g}}_{p,s}^*, \hat{\mathbf{a}}_1^*$  und  $\hat{\mathbf{a}}_2^*$  schneiden sich dann in einem Punkt  $\hat{\mathbf{p}} \in P^5$ , der allerdings nicht auf der Plücker-Quadrik (2) liegen muß (also i. allg. keiner Geraden des  $\bar{E}^3$  entspricht). Die beiden Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{p,q}^* \wedge \hat{\mathbf{g}}_{p,s}^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_2^*$  und  $\hat{\mathbf{g}}_{q,r}^* \wedge \hat{\mathbf{g}}_{r,s}^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_2^*$  des  $P^5$  schneiden die Plücker-Quadrik in je (mindestens) zwei (evtl. konjugiert-komplexen) Punkten, die natürlich auch zusammenfallen können. Diese Punkte entsprechen den vier Geraden  $\vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{p}_1), \vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{p}_2), \vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{r}_1)$  sowie  $\vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{r}_2)$  des  $\bar{E}^3$ , die durch die Netzprojektion  $\vartheta_\rho$  auf die vier Kreisschnittpunkte  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  abgebildet werden. Die Aussage (1) ist äquivalent dazu, daß diese vier Punkte des  $P^5$  in einer 2-Ebene enthalten sind, denn die beiden Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{p,q}^* \wedge \hat{\mathbf{g}}_{p,s}^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_2^*$  und  $\hat{\mathbf{g}}_{q,r}^* \wedge \hat{\mathbf{g}}_{r,s}^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{a}}_2^*$  des  $P^5$  schneiden sich dann im Punkt  $\hat{\mathbf{p}}$ .

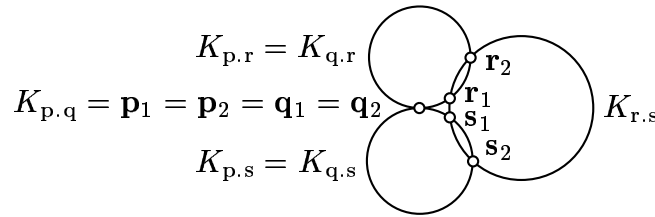
Die vier Bildkreise  $K_{p,q}, K_{q,r}, K_{r,s}, K_{p,s}$  liegen genau dann in einer Büschelsatz-Konfiguration, wenn eine von den beiden Brenngeraden  $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$  verschiedene Gerade durch die Geraden  $\vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{p}_1), \vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{p}_2), \vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{r}_1)$  und  $\vartheta_\rho^{-1}(\mathbf{r}_2)$  existiert, d.h., falls diese vier Geraden in einem Regulus enthalten sind. Das aber ist genau dann der Fall, wenn die den vier Geraden entsprechenden Punkte des  $P^5$  in einer 2-Ebene liegen. Damit ist die Äquivalenz (1)  $\Leftrightarrow$  (2) bewiesen.

Die Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) folgt unmittelbar mit Hilfe der Kreistreue der stereographischen Projektion.  $\square$

Sei nun ein linearer Geradenkomplex  $\mathcal{K}$  im  $\bar{E}^3$  gegeben, der auch die beiden Brenngeraden  $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$  des Drehnetzes (3) enthält. Mit jeder Geraden  $\hat{\mathbf{g}}$  ist in diesem Komplex auch der Regulus enthalten, der von den drei Geraden  $\hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{a}}_1$  und  $\hat{\mathbf{a}}_2$  aufgespannt wird. Die Netzprojektion  $\vartheta_\rho$  bildet jede der Geraden dieses Regulus auf ein- und denselben Kreis in der Mittelebene  $x_3 = 0$  ab. Als Bild der  $\infty^3$  Geraden des Komplexes  $\mathcal{K}$  entsteht somit eine Schar von  $\infty^2$  Kreisen in der Mittelebene  $x_3 = 0$ , von denen nach Satz 3 je vier in einer Büschelsatz-Konfiguration liegen. Daraus folgt unmittelbar, daß die verallgemeinerte stereographische Projektion  $\delta_\rho$  die Geraden des Komplexes  $\mathcal{K}$  auf die Schar der  $\infty^2$  sphärischen Kreise abbildet, deren Trägerebenen sich sämtlich in einem festen Punkt  $\mathbf{p}_\mathcal{K}$  schneiden. Die so entstandene Kreisschar

auf der Kugel (7) bzw. in der Mittelebene  $x_3 = 0$  wird im folgenden als ein *verallgemeinertes Kreisbündel* auf der Kugel (7) (mit dem *Trägerpunkt*  $\mathbf{p}_\mathcal{K}$ ) bzw. in der Mittelebene bezeichnet.

Das Bild eines Geradenkomplexes bei einer Netzprojektion wurde erstmalig von L. Eckhart untersucht [7], dabei wurde einem solchen Komplex als Bild ein Paar (Kreis, Punkt) zugeordnet. Der (evtl. nullteilige) Kreis wird von den Bildpunkten derjenigen Geraden des Komplexes  $\mathcal{K}$  gebildet, die gleichzeitig im Drehnetz (3) enthalten (also projizierend) sind. Diese Netzgeraden bilden i. allg. einen Regulus. Ihr Bild ist folglich ein Kreis, der im weiteren als der *Eckhartsche Bildkreis* des Komplexes  $\mathcal{K}$  bezeichnet wird. Der Punkt ist der Schnittpunkt der Achse des Komplexes mit der Bildebene.



**Abbildung 5.** Entartete Büschelsatz-Konfiguration.

Falls von den vier Geraden  $\hat{\mathbf{g}}_{p,q}, \hat{\mathbf{g}}_{q,r}, \hat{\mathbf{g}}_{r,s}, \hat{\mathbf{g}}_{p,s}$  aus der ersten Aussage des Satzes 3 eine Gerade (etwa  $\hat{\mathbf{g}}_{p,q}$ ) gleichzeitig Netzgerade (also projizierend) ist, dann entartet die Büschelsatz-Konfiguration aus Aussage (2), siehe Abbildung 5. Der Eckhartsche Bildkreis des Geradenkomplexes  $\mathcal{K}$  besteht somit aus all den Punkten der Mittelebene  $x_3 = 0$ , die als „entartete Kreise“ Teil des verallgemeinerten Kreisbündels in der Mittelebene  $x_3 = 0$  sind. Durch die stereographische Projektion  $\sigma$  wird dieser Kreis auf diejenigen Punkte der Kugel (7) abgebildet, die in der Polaren des Trägerpunktes  $\mathbf{p}_\mathcal{K}$  des verallgemeinerten Kreisbündels liegen. Zusammenfassend gilt:

**Folgerung 4.** Die verallgemeinerte stereographische Projektion  $\delta_\varrho = \sigma \circ \vartheta_\varrho$  bildet die Geraden eines linearen Geradenkomplexes  $\mathcal{K}$ , der die beiden Brenngeraden  $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$  des Drehnetzes enthält, auf ein verallgemeinertes Kreisbündel auf der Kugel (7) ab. Der Trägerpunkt  $\mathbf{p}_\mathcal{K}$  dieses verallgemeinerten Kreisbündels ist der Pol der Ebene des  $\bar{\mathbb{E}}^3$ , in der das Bild des Eckhartschen Bildkreises des Komplexes  $\mathcal{K}$  unter der stereographischen Projektion liegt.

Falls der Geradenkomplex  $\mathcal{K}$  zu einem Geradengebüsch entartet (siehe [12, S. 233]), so ist die Gebüschachse stets Netzgerade, da auch die beiden Brenngeraden  $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$  in  $\mathcal{K}$  enthalten sein sollen. Als Bilder der Komplexgeraden bei der Netzprojektion  $\vartheta_\varrho$  bzw. bei der verallgemeinerten stereographischen Projektion  $\delta_\varrho$  entsteht somit ein Kreisbündel in der Mittelebene  $x_3 = 0$  bzw. auf der Kugel (7), dessen Trägerpunkt das Bild der Gebüschachse ist.

Durch die verallgemeinerte stereographische Projektion wird jedem Geradenkomplex  $\mathcal{K}$ , der die Brenngeraden des Drehnetzes (3) enthält, eineindeutig ein Punkt

$\mathbf{p}_K$  des  $\bar{E}^3$  als Trägerpunkt des verallgemeinerten Kreisbündels auf der Kugel zugeordnet. Dabei entsprechen die Punkte der Kugel gerade den entarteten Geradenkomplexen.

## 5. Biquadratische rationale Parameterdarstellungen der Einheitskugel

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften biquadratischer rationaler Parameterdarstellungen der Einheitskugel untersucht werden. Gegeben seien vier nicht kollineare Punkte  $\mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{b}_{0,1}$ ,  $\mathbf{b}_{1,0}$  und  $\mathbf{b}_{1,1}$  des  $\bar{E}^3$ . Die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - u)(1 - v) \mathbf{b}_{0,0} + (1 - u)v \mathbf{b}_{0,1} + u(1 - v) \mathbf{b}_{1,0} + uv \mathbf{b}_{1,1} \quad (12)$$

$$(u, v) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

beschreibt eine *Ringquadrik*, oder, falls die vier Punkte koplanar sind, eine *Ebene* des  $\bar{E}^3$ . Im ersten Fall sind die  $u$ - und  $v$ -Parameterlinien gerade die beiden Erzeugendenscharen der Ringquadrik, sie bilden also zwei Reguli. Je nach Wahl der homogenen Koordinaten der vier Punkte  $\mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{b}_{0,1}$ ,  $\mathbf{b}_{1,0}$  und  $\mathbf{b}_{1,1}$  erhält man aus (12) sämtliche Quadriken des Büschels durch die vier Geraden  $\mathbf{x}(0, v)$ ,  $\mathbf{x}(1, v)$ ,  $\mathbf{x}(u, 0)$  und  $\mathbf{x}(u, 1)$ . Als Bild

$$\mathbf{y}(u, v) = \delta_\varrho(\mathbf{x}(u, v)) \quad (13)$$

der Ringquadrik (12) unter der verallgemeinerten stereographischen Projektion  $\delta_\varrho$  ( $\varrho \notin \{0, \infty\}$ ) ergibt sich eine biquadratische rationale Parameterdarstellung im  $\bar{E}^3$ , die einen Teil der Einheitskugel (7) beschreibt. In [5] wurde gezeigt, daß sich *jede* solche Parameterdarstellung der Kugel auf diese Weise konstruieren läßt.

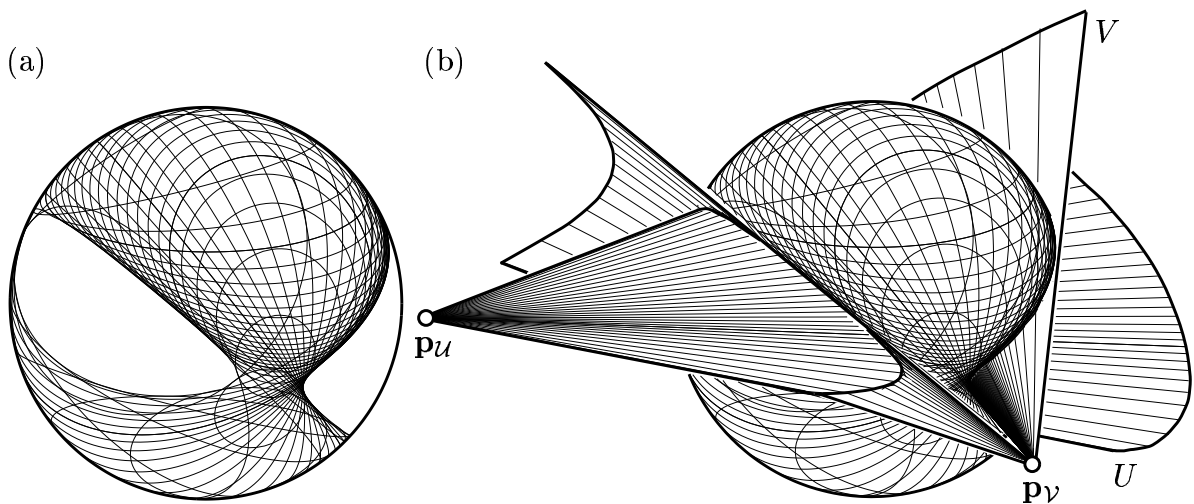


Abbildung 6. Biquadratische Parameterdarstellung der Kugel.

Ein Beispiel einer biquadratischen rationalen Parameterdarstellung der Kugel ist in Abbildung 6a dargestellt. Die  $u$ - und  $v$ -Parameterlinien bilden zwei Scharen von Kreisen auf der Kugel.

Da die von den Parameterlinien der Ringquadrik (12) gebildeten Reguli zusammen mit den beiden Brenngeraden des Drehnetzes (3) jeweils einen linearen Geradenkomplex aufspannen, liegen je vier  $u$ - bzw.  $v$ -Parameterlinien von (13) nach Satz 3 in einer Büschelsatz-Konfiguration. Die Trägerebenen der  $u$ - bzw.  $v$ -Parameterlinien von (13) schneiden sich also in einem Punkt  $\mathbf{p}_u$  bzw.  $\mathbf{p}_v$  des  $\bar{E}^3$ , siehe Abbildung 6b. Von U. Fink wurde in [9, S. 102] die Vermutung geäußert, daß diese zwei Scharen von Trägerebenen jeweils einen quadratischen Kegel  $U$  bzw.  $V$  einhüllen. Mit Hilfe der verallgemeinerten stereographischen Projektion ist es nun möglich, diese Aussage zu beweisen:

Seien  $\mathbf{x}(u_0, v)$  und  $\mathbf{x}(u_1, v)$  zwei verschiedene  $v$ -Parameterlinien der Fläche (12), die durch eine der beiden Brenngeraden des Netzes (3) verlaufen. (Es ist stets möglich, mindestens zwei solche  $v$ -Parameterlinien zu finden, da die Fläche (12) die beiden Brenngeraden des Drehnetzes stets in je mindestens einem Punkt schneidet.) Diese beiden Geraden sind natürlich komplex, d.h. es gilt  $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ . Die Trägerebene der  $v$ -Parameterlinie  $\mathbf{y}(u, v)$  wird von den drei Punkten  $\mathbf{y}(u_0, v) = \delta_\varrho(\mathbf{x}(u_0, v))$ ,  $\mathbf{y}(u_1, v) = \delta_\varrho(\mathbf{x}(u_1, v))$  und  $\mathbf{p}_v$  aufgespannt. Der homogene Koordinatenvektor  $\mathbf{T}(v)$  dieser Ebene läßt sich also aus dem Graßmann-Produkt

$$\mathbf{T}(v) = \mathbf{p}_v \vee \delta_\varrho(\mathbf{x}(u_0, v)) \vee \delta_\varrho(\mathbf{x}(u_1, v)) \quad (14)$$

berechnen. Setzt man (12) ein, so entsteht zunächst ein vektorwertiges Polynom vom Grad 4 in  $v$ . Da die beiden betrachteten  $v$ -Parameterlinien aber jeweils eine der Brenngeraden des Netzes (3) schneiden, besitzt dieses vektorwertige Polynom mindestens zwei Basispunkte, d.h., für zwei  $v$ -Werte liefert  $\mathbf{T}(v)$  den Nullvektor  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^4$ . (Der Grund dafür ist, daß die durch eine Brenngerade verlaufenden Geraden des  $\bar{E}^3$  von  $\delta_\varrho$  auf die (komplexen) Erzeugenden der Kugel abgebildet werden.) Damit ist es möglich, ein quadratisches Polynom  $\lambda(v)$  abzuspalten. Die Trägerebenenchar der  $v$ -Parameterlinien hüllt folglich einen quadratischen Kegel  $V$  ein, der auch zu einer Geraden entarten kann. Da die Trägerebenenchar der  $u$ -Parameterlinien ebenfalls einen quadratischen Kegel  $U$  einhüllt, gilt:

**Satz 5. (Vermutung von U. Fink)** *Falls eine biquadratische Parameterdarstellung der Einheitskugel nicht zu einem Punkt oder einem Kreis entartet, so hüllen die von den Trägerebenen der  $u$ - und der  $v$ -Parameterlinien gebildeten Ebenenscharen jeweils einen quadratischen Kegel ein, oder sie liegen in einem Ebenenbüschel. Wenn beide Scharen von Trägerebenen je einen Kegel einhüllen, dann sind diese zusammen mit der Kugel in einem Quadrikenbüschel enthalten und die beiden Kegelspitzen liegen zueinander polar bezüglich der Kugel. Die Schnittkurven der beiden Kegel mit der Kugel sind identisch. Sie bilden die Umrißkurve der biquadratischen Parameterdarstellung, welche eine doppelte Überdeckung eines Teiles der Kugel (7) beschreibt.*

**Beweis.** Es bleibt noch zu zeigen, daß beide Kegel zusammen mit der Kugel in einem Quadrikenbüschel enthalten sind. Die beiden Kegel schneiden die Kugel offensichtlich in *einer* Kurve vierter Ordnung, die den von der Parameterdarstellung überdeckten vom nicht überdeckten Teil der Kugel trennt (siehe Abbildung 6a). Damit liegt die Kugel in dem von den zwei Kegeln erzeugten Büschel.  $\square$

Zusätzlich zur eben bewiesenen Aussage wird in [6] noch gezeigt, daß sich für jede reguläre Quadrik, die in einem von zwei Kegeln  $U$  und  $V$  erzeugten Büschel enthalten ist, zwei biquadratische rationale Parameterdarstellungen finden lassen, bei denen die Trägerebenenscharen der Parameterlinien die beiden Kegel  $U$  und  $V$  einhüllen.

In Abbildung 6b sind die beiden von den Trägerebenenscharen der Parameterlinien eingehüllten quadratischen Kegel dargestellt. Die Schnittkurve der beiden Kegel mit der Kugel ist das Bild des Netzumrisses der Fläche (12) unter der stereographischen Projektion  $\sigma$ . Falls die vier Punkte  $\mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{b}_{0,1}$ ,  $\mathbf{b}_{1,0}$  und  $\mathbf{b}_{1,1}$  koplanar sind, dann fallen die beiden Punkte  $\mathbf{p}_u$  und  $\mathbf{p}_v$ , in denen sich die Trägerebenen der  $u$ - und der  $v$ -Parameterlinien schneiden, zu einem Punkt auf der Kugel zusammen. Dieser Punkt ist das Bild der Netzgeraden, die in der von den vier Punkten aufgespannten Ebene enthalten ist.

## Schlußbemerkung

Durch geeignete projektive Abbildungen ist es unmittelbar möglich, die Ergebnisse dieser Arbeit auf beliebige ovale Quadriken zu übertragen. Auch für Ringquadriken und Kegel kann eine Verallgemeinerung der stereographischen Projektion gefunden werden. Diese ist dann die Zusammensetzung einer Netzprojektion bezüglich einer hyperbolischen bzw. parabolischen linearen Kongruenz mit einer stereographischen Projektion. Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften dieser Abbildungen wird in [6] gegeben. Dort werden auch Verfahren zur Interpolation und Approximation mit sphärischen rationalen Kurven entwickelt.

## Literatur

- [1] BENZ, W.: *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer, Berlin 1973.
- [2] BLASCHKE, W.: *Analytische Geometrie*, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel 1948.
- [3] BÖHM, W., und D. HANSFORD: Bézier patches on Quadrics, in FARIN, G. (Hrsg.): *NURBS for Curve and Surface Design*, SIAM, Philadelphia 1991, 1-14.
- [4] DICKSON, L.E.: *History of the Theory of Numbers Vol. II*, Chelsea, New York 1952.
- [5] DIETZ, R., J. HOSCHEK und B. JÜTTLER: An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics, *Computer Aided Geometric Design* 10 (1993), 211–229.

- [6] DIETZ, R.: *Rationale Bézier-Kurven und Bézier-Flächenstücke auf Quadriken*, Dissertation, TH Darmstadt, in Vorbereitung.
- [7] ECKHART, L.: Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene, *Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss.* 127 (1918), 91–118.
- [8] ECKHART, L.: *Konstruktive Abbildungsverfahren*, Springer, Wien 1926.
- [9] FINK, U.: *Biquadratische Bézier-Flächenstücke auf Quadriken*, Dissertation, Universität Stuttgart 1992.
- [10] GAUSS, C. F.: Über die Mutationen des Raumes, in: *Werke Bd. VIII* (herausgegeben von P. Stäckel), Teubner, Leipzig 1900, 358ff.
- [11] GEISE, G., und U. LANGBECKER: Finite quadric segments with four conic boundary curves, *Computer Aided Geometric Design* 7 (1990), 141-150.
- [12] GIERING, O.: *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Vieweg, Braunschweig 1982.
- [13] HOSCHEK, J., und D. LASSER: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, Teubner, Stuttgart (2. Aufl.) 1992.
- [14] JÜTTLER, B.: Zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken, *Journal of Geometry* 47 (1993), 53–64.
- [15] LEBESGUE, V. A.: Sur une identité qui conduit à toutes les solutions de l'équation  $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 66 (1868), 396-398.
- [16] TUSCHEL, L.: Über eine Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwertung, *Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss.* 120 (1911), 233–254.
- [17] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 44 (1936), 249–279.